

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

20. Band, Heft 9

15. August 1939

S. 385—432

## Geometrie.

### Allgemeines:

● Köhler, O., U. Graf und C. Calov: *Mathematische Raumbilder*. 2. Aufl. Berlin: Plastoreoskop-Verl. Dreyer & Co. 1938. 66 S. geb. RM. 4.—.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten nur durch Druckfehlerberichtigungen. Das Buch enthält 24 zentralperspektivisch genau konstruierte, nach besonderem Farbtönungsverfahren hergestellte Anaglyphen, die die regulären Körper, Körperinhalte, Kegelschnitte, Kugelgeometrie u. a. betreffen und ein hervorragendes Hilfsmittel zur Schulung der Raumanschauung darstellen. Man kann an ihnen durch Veränderung des Blickpunktes Affinitäten anschaulich machen. *Harald Geppert*.

Pühringer, Alfred: *Unter welchen Bedingungen sind zwei gegebene Kegelschnitte in der Zeichenfläche die scheinbaren Umrisse zweier Kugeln bei einer Zentralprojektion aus demselben Augpunkt, und wie löst man Aufgaben über solche Kegelschnitte auf Grund dieses Zusammenhanges?* Deutsche Math. 4, 81—97 (1939).

Montel, Paul: *Sur un problème de J. Bertrand*. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 3—7 (1938).

Verf. bringt für einen Pompeiuschen Satz (dies. Zbl. 18, 325) und dessen Verallgemeinerung zwei Beweise mittels Ähnlichkeitstransformationen. Er zeigt nachher, daß dieser Satz mit einem Extremumproblem von J. Bertrand eng verbunden ist. — Der Lösung von Montel folgt ein Prioritätsanspruch von de Lapierre. Wir bemerken dazu, daß eine gleiche Frage und Lösung auch bei Möbius (Leipziger Berichte 4, 1852) auftritt.

*D. Barbilian* (București).

Hoborski, A.: *Elementarer Beweis eines planimetrischen Satzes des Herrn D. Pompeiu*. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 9—12 (1938).

Germani, M. D.: *Sur un théorème de M. D. Pompeiu*. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 12—17 (1938).

Postelniceseo, C.: *Sur un théorème de M. D. Pompeiu*. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 38—39 (1938).

Die beiden ersten Arbeiten enthalten verwinkelte Lösungen und Besprechungen desselben Pompeiuschen Satzes. Die letzte Arbeit bringt eine Lösung, die von der Montelschen (vgl. vorsteh. Ref.) nicht als wesentlich verschieden gelten kann. — Wir glauben, daß ein einfacher Satz nur zu interessanten axiomatischen Besprechungen Anlaß geben muß. Die methodologischen Variationen haben wenig wissenschaftliches Interesse.

*D. Barbilian* (București).

Child, J. M.: *Inequalities connected with a triangle*. Math. Gaz. 23, 138—143 (1939).

On a theorem of Erdős-Mordell: If  $O$  is any point within a triangle and  $OA_1$ ,  $OB_1$ ,  $OC_1$  are the perpendiculars from  $O$  to the sides, then

$$OA + OB + OC \geq 2(OA_1 + OB_1 + OC_1),$$

the sign of equality occurring only when the triangle is equilateral and  $O$  its centre. Proof, extensions, special cases.

*O. Bottema* (Deventer, Holl.).

Nehring, Otto: *Eine neue Konstruktion der Brocardschen Punkte*. Deutsche Math. 4, 23—24 (1939).

Unter Verwendung einer von Zacharias angegebenen Konstruktion [Z. math. nat. Unterr. 65, 325—328 (1934)] über die konstruktive Herstellung einer Inzidenzeigenschaft der Schnittpunkte der Ecktransversalen eines Dreiecks beweist Verf. rechnerisch das folgende Konstruktionsverfahren für die Brocardschen Punkte: Man zeichne im Dreieck die Mittellinien und ihre Gegentransversalen; beide Tripel verwende



man als Ausgangstransversalen und wende auf sie die Zachariassche Konstruktion an. Zusätzlich ergeben sich noch zwei weitere Aussagen über den Grebeschen Punkt und den Mittelpunkt einer in diesem Zusammenhang auftretenden Strecke. *Steck.*

**Cavallaro, M. Vincenzo G.:** Notes sur la géométrie du triangle. Bull. Sci. École polytechn. Timişoara 8, 167—171 (1939).

Sur un théorème de Laguerre: Si  $ABC$  est un triangle inscrit à un cercle  $R$  et circonscrit à une conique de longueurs d'axes  $2\alpha$  et  $2\beta$ , si  $P$  et  $P'$  sont les puissances des foyers par rapport au cercle, on a  $PP' = \beta^2 R^2$ . Le point de Lemoine et les points de Brocard. *O. Bottema* (Deventer, Holl.).

**Lyness, R. C.:** A geometrical problem. Math. Gaz. 23, 155—160 (1939).

To divide a triangle in a given ratio by a straight line passing through a given point. To find the ratio  $\frac{k}{1-k}$  which gives the greatest chance that through a point, chosen at random within a triangle, six lines may be drawn to divide the triangle in that ratio. The author gives an equation, which  $k$  must satisfy;  $k$  is approximately 0,47.

*O. Bottema* (Deventer, Holl.).

**Thébault, V.:** Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 23—27 (1938).

Anwendung der bekannten der Ptolemäusschen Relation gleichgebauten Identität zwischen den Laguerreschen Distanzen vierer orientierter ebener Kreise zur Herstellung verschiedener Formeln aus der Geometrie des Dreiecks. *D. Barbilian* (Bucureşti).

**Goormaghtigh, R.:** Sur certaines fonctions de trois nombres complexes d'égal module. Mathesis 53, 72—75 (1939).

Wählt man bei Betrachtung von Dreieckseigenschaften mittels komplexer Koordinaten den umschriebenen Kreis des Dreiecks als Einheitskreis  $\Gamma$  und sind  $t_i$  die komplexen Zahlen, die den Ecken  $A_i$  entsprechen,  $O$  der Mittelpunkt von  $\Gamma$  und  $\Omega$  der Einheitspunkt, sind ferner  $\sigma_1 = \sum t_i$ ,  $\sigma_2 = \sum_{i \neq k} t_i t_k$ ,  $\sigma_3 = \prod t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die zugehörigen symmetrischen Funktionen, so ist bekanntlich  $\sigma_1$  der Höhenschnittpunkt  $H$  des Dreiecks. Die Note gibt jetzt die geometrischen Bedeutungen von  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  an:  $\sigma_2$  ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $B_1 B_2 B_3$ , das von denjenigen Punkten gebildet wird, in denen  $\Gamma$  die durch  $\Omega$  gehenden Parallelen zu  $A_2 A_3$ ,  $A_3 A_1$ ,  $A_1 A_2$  trifft. Und:  $\sigma_2$  ist der Symmetriepunkt des Höhenschnittpunkts in bezug auf den zur Simsonschen Geraden von  $\Omega$  parallelen Durchmesser von  $\Gamma$ .  $\sigma_3$  ist der Schnittpunkt von  $\Gamma$  mit dem von  $\Omega$  auf seine Simsonsche Gerade im Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  gefällten Lote. Daraus ergeben sich für einige Anwendungen, die folgen, leichtere und kürzere Ableitungen.

*Steck* (München).

**Tuckey, C. O.:** A diagram for the study and solution of triangles. Math. Gaz. 23, 150—154 (1939).

If the sides of a triangle are 1,  $x$ ,  $y$  in descending order, it is represented by the point whose coordinates are  $x$ ,  $y$ . The point representing the triangle lies in a quarter of an unit square. The circle  $x^2 + y^2 = 1$  corresponds to right-angled triangles. A triangle with a given angle corresponds to a point on a certain hyperbola or ellipsis. The diagram can be used for the solution of triangles and for questions as the following: the least angle of a triangle has a given value; between what limits will the ratio of its least to its greatest side lie?

*O. Bottema* (Deventer, Holl.).

**Abason, Ernest:** Sur la réciproque d'un théorème relatif au triangle équilatéral. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 27—37 (1938).

Nachweis des Satzes von Angelescu durch komplexe Rechnung in der Zahlenebene.

*D. Barbilian* (Bucureşti).

**Thébault, V.:** Sur l'hexagone à côtés consécutifs rectangulaires. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 18—22 (1938).



**Sinogowitz, Ulrich:** Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreise in der Ebene. Z. Kristallogr. A 100, 461—508 u. Rostock: Diss. 1939.

Eine Kreislage ist eine Anordnung gleicher, sich nicht durchdringender Kreise in der Ebene, bei der jeder Kreis in jeden anderen Kreis durch eine Bewegung erster oder zweiter Art übergeführt werden kann, wobei die gesamte Anordnung mit sich selbst zur Deckung gebracht wird. Gesucht wird die Gesamtheit aller verschiedenwertigen Kreislagen. Um die Kreismittelpunkte einer Kreislage seien die Wirkungsbereiche konstruiert. Sie bilden eine Ebenenteilung in topologisch äquivalente Vielecke. Der erste Schritt besteht in der Ermittlung aller verschiedenen derartigen Ebenenteilungen (11 La vesteilungen). Hierauf wird die Beziehung zwischen Ebenenteilung und Flächensymmetrie (17 Ebenengruppen) untersucht (Ableitung von 93 planverschiedenen  $P$ -Belegungen). Die Polygone einer  $P$ -Belegung werden zu Wirkungsbereichen spezialisiert und schließlich in diese Kreise eingelagert. Auf diese Weise erhält man 31 verschiedenartige und 131 verschiedenwertige Kreislagen. Berücksichtigt man das Zerfallsverbot, so wird man auf die 31 Kreispackungen (Niggli) geführt. (Wegen Definitionen obiger Begriffe vgl. Originalarbeit!)  
W. Nowacki (Bern).

**Budeanu, C.:** Sur l'application de la représentation vectorielle dans un espace à plusieurs dimensions. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 293—300 (1938).

Die Arbeit stellt eine kürzere Zusammenfassung früherer Untersuchungen des Verf. dar (dies. Zbl. 18, 268).  
Burau (Hamburg).

**Wrinch, D. M.:** The geometry of discrete vector maps. Philos. Mag., VII. s. 27, 98—122 (1939).

Ausführliche Darstellung und Erweiterung einer früher referierten Arbeit (vgl. dies. Zbl. 19, 283). Einer Konfiguration von endlich oder unendlich vielen, periodisch angeordneten Punkten im Raume  $S_1$  wird eine „vector-map“ im Raume  $S_2$  zugeordnet und es werden Methoden erläutert, welche den Übergang von einem  $S_2$  zum vollständigen System aller möglichen  $S_1$  zu deduzieren gestatten. Diese geometrischen Überlegungen finden in der Kristallstrukturanalyse bei der Bestimmung von unbekannten Atompositionen Anwendung. [Vgl. die Bemerkungen von Bragg u. a. (Nature 1939) zur obigen von Langmuir, Neville und Wrinch ausgearbeiteten Methode.]

W. Nowacki (Bern).

**Wrinch, D. M.:** Vector maps of finite and periodic point sets. Philos. Mag., VII. s. 27, 490—507 (1939).

Jedem Punkt einer gegebenen Punktfolge  $P_n$  im Raum  $S_1$  sei die Intensität  $r_n$  zugeordnet. Um dazu im Raum  $S_2$  die entsprechende „vector map“ zu konstruieren, wählt man einen Punkt  $O_2$  in  $S_2$  als Ursprung und zieht von ihm aus alle Vektoren gleich den  $\overrightarrow{P_n P_m}$  (und  $\overrightarrow{P_m P_n}$ ) für alle Werte von  $m$  und  $n$  (inklusive  $m = n$ ) und erteilt den Endpunkten ( $P_n P_m$ ) dieser Vektoren die Intensitäten  $r_n r_m$ . Damit haben wir eine Zuordnung der Punktintensitäten des  $S_1$  mit denjenigen des  $S_2$  hergestellt und es werden in der Arbeit die Beziehungen zwischen diesen beiden Intensitätsfolgen insbesondere für endliche trigonale und periodische Punktanordnungen im  $S_1$  untersucht.

W. Nowacki (Bern).

### Analytische und algebraische Geometrie:

**Pompeiu, D.:** Un théorème d'existence. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 46—47 (1938).

Die Möglichkeit des Verschwindens des Gliedes  $A_{11}xy$  in einer nichthomogenen Gleichung zweiter Ordnung mit zwei Unbekannten bei Drehung der Koordinatenachsen wird auf Grund eines einfachen Kontinuitätsprozesses bestätigt. Diese Methode, die dem Verf. eigen ist, kann auch zum Beweise gewisser Sätze aus der Kinematik der Flüssigkeiten dienen.  
D. Barbilian (Bucuresti).



**Bottema, O.: Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung.** *Mathematica, Zutphen B 7*, 174—176 (1939) [Holländisch].

Verf. erweitert einen von J. A. Barrau in seinem (holländisch geschriebenen) Lehrbuch der analytischen Geometrie gegebenen geometrischen Beweis, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer quadratischen Form in beliebig vielen Variablen reell sind, wenn sie verschieden sind. Verf. zeigt nämlich, durch eine leichte Erweiterung des Beweises ohne Anwendung von Stetigkeitsbetrachtungen, wie die Realität auch dann folgt, wenn mehrfache Wurzeln auftreten. *G. Schaake.*

**Bottema, O.: Eine Kurve dritten Grades.** *Mathematica, Zutphen B 7*, 176—179 (1939) [Holländisch].

**Tummers, J. H.: Eine andere Erweiterung.** *Mathematica, Zutphen B 7*, 179—180 (1939) [Holländisch].

Der Satz von Tummers (dies. Zbl. 20, 51) läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: Durch einen beliebigen Punkt  $P$  ziehe man zu den Seiten des Dreiecks  $ABC$  die Parallelen und schneide sie mit einer Geraden  $g$  in  $S_1, S_2, S_3$ ; damit dann  $AS_1, BS_2, CS_3$  sich in einem Punkte  $S$  schneiden, muß  $g$  Tangente eines dem Dreieck  $ABC$  einbeschriebenen Kegelschnitts  $K$  sein. Die Verbindungslinien von  $A, B, C$  mit den Berührungspunkten von  $K$  und den Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkte  $Q$ , der mit dem Mittelpunkt  $O$  von  $K$ , dem Schwerpunkt  $Z$  des Dreiecks und dem Punkte  $P$  auf einer Geraden liegt, wobei  $PO:ZQ:OZ = 3:2:1$  ist. Mit wanderndem  $g$  beschreibt  $S$  eine  $C_3$  mit dem Doppelpunkt  $P$ , die durch  $A, B, C$  und die unendlichfernen Punkte der Dreiecksseiten geht. — Dieser Satz ist in der folgenden Verallgemeinerung von Tummers enthalten:  $K$  sei ein beliebiger, dem Dreieck  $ABC$  einbeschriebener Kegelschnitt; durch einen beliebigen Punkt  $P$  ziehen wir zu  $PA, PB, PC$  die vierten harmonischen Strahlen  $PA_1, PB_1, PC_1$  bezüglich der Tangenten durch  $P$  an  $K$ . Schneiden diese eine Tangente  $g$  von  $K$  in  $A_1, B_1, C_1$ , so schneiden sich die Geraden  $AA_1, BB_1, CC_1$  in einem Punkte  $S$ , der mit wanderndem  $g$  eine  $C_3$  mit dem Doppelpunkt  $P$  beschreibt, welche durch  $A, B, C$  läuft.

*Harald Geppert (Gießen).*

**Venkataraman, B. R.: On the inverses of a circle with respect to a tetrad of fixed circles and their orthogonal tetrad.** *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 9*, 128—132 (1939).

Let  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) be four circles and  $S_i$  the four circles respectively orthogonal to sets of three chosen from  $C_i$ . If the inverses of a point  $P$  with respect to  $C_i$  lie on a circle, then the inverses w. r. t.  $S_i$  also lie on a circle. The locus of  $P$  is an octavic curve having quadruple points at the circular points. If the inverses of  $P$  w. r. t.  $n$  concurrent circles  $C_i$  lie on a circle then the inverses of  $P$  w. r. t. every concurrent set of  $n$  circles of the Miquel-Clifford configuration generated by  $C_i$  also lie on a circle. The circles of the plane are represented by the points of a projective space.

*O. Bottema (Deventer, Holl.).*

**Levi, F. W.: On a fundamental theorem of geometry.** *J. Indian Math. Soc., N. s. 3*, 182—192 (1939).

Um zu zeigen, daß die Einbettung der ebenen projektiven Geometrie in eine räumliche mit der Annahme des Desarguesschen Satzes als weiteres Axiom neben den Verknüpfungs- und Dimensionsaxiomen der Ebene gleichbedeutend ist, schlägt Verf. einen anderen Weg ein als den üblichen, der auf dem Hessesbergschen Punktkalkül beruht. Er richtet zu diesem Zweck die projektive Ebene als Zeichenebene der darstellenden Geometrie ein, indem er einen besonderen Punkt  $Y$  und eine Gerade  $\eta$  durch diesen Punkt auszeichnet. Vermöge der  $V$ - und  $D$ -Axiome und des Desarguesschen Satzes (in geeigneter Formulierung) gelangt er zu einem Modell des affinen Raumes, wo sich das Axiomensystem der affinen Geometrie verifizieren läßt. Man geht nachher in üblicher Weise von der affinen zu der projektiven Geometrie aus  $R_3$  über.

*D. Barbilian (Bucureşti).*



**Halperin, Israel:** On the transitivity of perspectivity in continuous geometries. Trans. Amer. Math. Soc. 44, 537—562 (1938).

Im Anschluß an die Arbeiten von G. Birkhoff, „Combinatorial relations in projective geometries“ (dies. Zbl. 12, 82), und J. von Neumann, „Continuous geometries“ (dies. Zbl. 14, 223) und „Examples of continuous geometries“ (dies. Zbl. 14, 223) wird mit neuen Methoden und unter Annahme eines schwächeren Systems von Axiomen die Transitivität und die Perspektivität der Relation „teilweise geordnet“ festgestellt. Es werden nachher die Additiv- und Stetigkeitseigenschaften von Perspektivitäten bewiesen. *Golqb* (Krakau).

**Deaux, R.:** Polarités planes harmoniques à une homographie plane non homologique. Mathesis 53, 66—71 (1939).

Une polarité  $\theta$  est harmonique à une homographie  $\omega$  si  $\theta$  transforme  $\omega$  en son inverse ( $\theta\omega\theta = \omega^{-1}$ ). L'auteur établit qu'il existe une et une seule polarité plane  $\theta$  harmonique à une homographie non homologique plane  $\omega$  donnée, telle qu'un point réel n'appartenant à aucune droite unie ait pour polaire une droite réelle ne passant par aucun point uni. Il en déduit des propriétés de la conique fondamentale de la polarité  $\theta$  et des coniques engendrées par deux faisceaux de rayons homologues dans  $\omega$ . Les résultats sont obtenus par la géométrie pure. *L. Godeaux* (Liège).

**Arvesen, Ole Peder:** Sur les transformations par semi-droites réciproques. Norsk mat. Tidsskr. 21, 9—12 (1939).

Bildet man nach Bricard die gerichteten Geraden einer Ebene  $E$  auf die Punkte eines quadratischen Kegels  $K$  ab, so entsprechen denjenigen Involutionsen von  $E$  in sich, die gerichtete Geraden und Kreise wieder in solche überführen, involutorische Projektivitäten von  $K$  in sich; sie zerfallen also in drei Typen, je nachdem es sich um eine Homologie mit dem Zentrum 1. in der Spitze  $S$  von  $K$  oder 2. außerhalb  $K$  handelt oder 3. eine biaxiale Homographie vorliegt, deren eine Achse durch  $S$  geht, während die zweite zu ihr bezüglich  $K$  konjugiert ist. Verf. zeigt nun, daß die Involution 3 in  $E$  das Produkt einer Involution 2 mit der Spiegelung an einem festen Punkte ist. Dies ist der Grund, warum Laguerre die Involutionsen 3 außer acht gelassen hat. *Harald Geppert* (Gießen).

**Weitzenböck, R.:** Die projektiven Invarianten von vier und fünf Geraden im  $R_4$ . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 245—252 (1939).

Verf. betrachtet Systeme von vier und fünf Geraden in einem projektiven 4-dimensionalen Raum ( $P_4$ ). Zwei Geraden  $a^{ij}$  und  $b^{ij}$  bestimmen eine Ebene  $P_3$ , dargestellt durch  $a^{[ij}b^{kl]} = q_h$ . Zwei derartige Verbindungsräume bestimmen eine Ebene  $P_2(p_iq_j)$ . Ist  $c^{ij}$  eine beliebige Gerade, so ist  $p_iq_jc^{ij}$  eine Invariante, welche verschwindet, wenn die Gerade  $c$  die Ebene  $P_2$  trifft. Verf. zeigt nun, daß fünf Geraden in  $P_4$  keine anderen Invarianten als die vom genannten Typus. *J. Haantjes* (Amsterdam).

● **Wieleitner, Heinrich:** Algebraische Kurven. T. 2. Allgemeine Eigenschaften. (Samml. Göschen. Bd. 436.) Berlin: Walter de Gruyter 1939. 122 S. u. 35 Fig. RM. 1.62.

**Bell, Clifford:** Plane curves with pseudo-rhamphoid cusps. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 193—197 (1939).

Siano  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  le equazioni parametriche di una curva reale  $C$ ; supponiamo che i punti di  $C$  appartengano ad una curva algebrica  $U(x, y) = 0$ . Può avvenire che esista un valore  $t_1$  di  $t$  tale che quando  $t$  cresce fino a  $t_1$  il punto  $[f(t), g(t)]$  si muove su  $C$  fino a raggiungere  $[f(t_1), g(t_1)]$  e quando  $t$  continua a crescere oltre  $t_1$ , il punto  $[f(t), g(t)]$  ritorna lungo lo stesso cammino per cui è arrivato. Il punto  $[f(t_1), g(t_1)]$  è chiamato dall'Autore, pseudo-cuspide di 2a specie o pseudo-rhamphoid cuspide, purchè la  $C$  non sia una retta. L'Autore studia questi punti in relazione all'annullarsi dei determinanti  $H_{ij}(t) = \begin{vmatrix} f_i(t) & g_i(t) \\ f_j(t) & g_j(t) \end{vmatrix}$ , dove gli indici  $i, j$  indicano gli ordini delle derivate rispetto a  $t$ . *Giovanni Dantoni* (Pisa).



**Kapferer, Heinrich:** Beweis eines Fundamentalsatzes der Kurven 3. Ordnung. Math. Z. 45, 312—318 (1939).

Bekanntlich gilt der Satz, daß  $\frac{1}{2}(n^2 + 3n - 2)$  „allgemeine“ Punkte der Ebene ein Büschel von  $C_n$  und daher dessen weitere  $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$  Basispunkte eindeutig bestimmen. Will man sich hier von den Unbestimmten frei machen, so gilt ein schwächerer Satz: Hat ein ebenes Büschel von Kurven  $n$ -ter Ordnung ( $n \geq 3$ ) keine festen Bestandteile und mindestens  $n^2 - 1$  verschiedene Basispunkte, so genügen je  $n^2 - 1$  Basispunkte zur Bestimmung des Büschels. Diesen Satz beweist Verf. mit rein algebraischen Mitteln und zeigt, daß jede der gemachten Voraussetzungen wesentlich ist. Für  $n = 3$  folgt der Satz, daß 8 verschiedene Punkte genau dann eindeutig einen neunten bestimmen, wenn nicht vier von ihnen auf eine Gerade oder sieben auf einen Kegelschnitt fallen.

Harald Geppert (Gießen).

**Gigli, Clotilde:** Alcuni risultati sulle curve algebriche reali sopra una quadrica a punti reali. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. 1, 19—24 (1939).

Auf einer reellpunktigen quadratischen Fläche werden nach Mitteilung des Verf. neue Typen solcher reeller algebraischer Kurven konstruiert, die die mit der Ordnung oder dem Geschlecht verträgliche Höchstzahl an Zügen aufweisen. Unter ihnen finden sich Kurven der geraden Ordnung  $n$ , die die Höchstzahl an Einschlüssen aufweisen, nämlich Sätze von drei geraden Zügen erster Art  $\alpha, \beta, \gamma$ , für die  $q + r + s + t + d = \frac{n}{2}$  ist; dabei bedeuten  $q - 1, r - 1, s - 1$  die Zahl der geraden Züge der Kurve, die einen der Züge  $\alpha, \beta, \gamma$ , aber nicht die beiden anderen einschließen,  $t$  die Zahl der Züge, die wenigstens zwei der Züge  $\alpha, \beta, \gamma$  einschließen, und  $2d$  die Anzahl der ungeraden Züge. Die Ergebnisse werden erhalten, indem man ein reelles Ebenenpaar einer kleinen Variation unterwirft, durch die eine nicht ausartende Quadrik entsteht; die vollständigen Beweise folgen in einer anderen Arbeit.

Mario Villa (Milano).

**Bogdan, C. P.:** Alcune determinazioni di una superficie di Veronese. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 28, 349—353 (1939).

Rosati hat bewiesen, daß durch eine elliptische  $C_6$  des  $S_5$  vier Veronesesche Flächen  $V_2^4$  bestimmt werden. Verf. untersucht die Bestimmung der  $V_2^4$  bei zerfallender  $C_6$  und beweist: Durch eine  $C_4$  und eine sie in zwei Punkten treffende  $C_2$  im  $S_5$  gehen zwei  $V_2^4$ , die durch eine harmonische Homologie zusammenhängen; berührt  $C_2$  die  $C_4$ , so gibt es nur eine  $V_2^4$ . Durch drei paarweise sich in je einem Punkte schneidende  $C_2$  eines  $S_5$  gehen zwei  $V_2^4$ , die durch drei harmonische Homologien ineinander übergehen. Diese Bestimmung ändert sich, wenn die  $C_2$  zusammenrücken; es gibt nur eine  $V_2^4$ , die durch zwei gegebene  $C_2$  geht und in drei Punkten der einen drei vorgegebene Ebenen berührt. Zwei  $V_2^4$ , die eine  $C_2$  gemein haben und in drei Punkten derselben sich in zweiter Ordnung berühren, fallen zusammen.

Harald Geppert.

**Amin, Amin-Yasin:** Sur les  $F$ -points de la surface de Del Pezzo dans l'espace à cinq dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1200—1202 (1939).

Ordnet man den  $C_3$  einer Ebene  $E$  mit vier vorgegebenen Basispunkten  $A_1 \dots A_4$  die Hyperbenen  $\Pi$  eines  $S_5$  zu, so entspricht  $E$  eine Del Pezzo-Fläche  $\Gamma$  des  $S_5$  von der Ordnung 5; auf ihr werden den  $A_i$  vier Geraden  $a_i$  und den Seiten des vollständigen Vierecks  $A_i A_k$  sechs weitere Geraden  $a_{ik}$  zugeordnet.  $a_i$  und  $a_k$  treffen  $a_{ik}$ , und daher kann man aus den zehn Geraden von  $\Gamma$  zehn windschiefe Sechsecke  $a_i a_{ik} a_k a_{k1} a_1 a_i$  aufbauen; die vier übrigen Geraden  $a_m, a_{m1}, a_{mk}, a_{m1}$  liegen dann in einer Hyperebene  $\Pi_m$ , die  $\Gamma$  längs  $a_m$  berührt. Die zehn Hyperebenen  $\Pi_i, \Pi_{ik}$  treffen sich zu je sechs in den zehn  $F$ -Punkten von  $\Gamma$ . Schneidet eine  $\Pi$  drei windschiefe unter den zehn Geraden von  $\Gamma$  in Punkten, deren Bilder in  $E$  zum System der  $C_3$  apolar sind, so enthält  $\Pi$  sicherlich  $F$ -Punkte.

Harald Geppert (Gießen).

**Yoxall, A. L.:** Note on a paper by J. A. Todd. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 125—126 (1939).

Beweis folgender Formel für die Anzahl  $\delta$  der scheinbaren Doppelpunkte einer algebraischen Fläche  $S$ , die auf einer algebraischen singularitätenfreien  $V_4$  liegt:  $2\delta = (S^2) - (SY) + (\mathcal{X}X) - (\mathcal{X}^2)_S + \psi$ . Es bedeuten hier  $X, Y$  eine kanonische  $V_3$  und eine kanonische Fläche auf  $V_4$ ; und  $\mathcal{X}, \psi$  eine kanonische Kurve und eine kanonische



**Punktgruppe auf  $S$ .** Diese Formel gestattet einige Vereinfachungen in einer früheren Abhandlung von J. A. Todd (dies. Zbl. 17, 325) einzuführen. Sie liefert auch ohne weiteres den üblichen Ausdruck von  $\delta$  für eine Fläche des vierdimensionalen Raumes.

E. G. Togliatti (Genova).

**Zariski, Oscar:** Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties. Amer. J. Math. 61, 249—294 (1939).

Im affinen Raum  $S_n$  sei eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit  $V_r$  durch ihre allgemeine Nullstelle  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  gegeben; es bedeute  $K$  den zugrunde liegenden algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0,  $\mathfrak{o} = K[\xi_1, \dots, \xi_n]$ ,  $\Sigma = K(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $P(a_1, \dots, a_n)$  einen Punkt der  $V_r$  und  $\mathfrak{p}_0 = (\xi_1 - a_1, \dots, \xi_n - a_n)$  das entsprechende nulldimensionale Primideal in  $\mathfrak{o}$ .  $P$  ist einfacher Punkt der  $V_r$ , falls ein Ideal  $(\eta_1, \dots, \eta_r)$  in  $\mathfrak{o}$  mit der isolierten Komponente  $\mathfrak{p}_0$  existiert. Unter dieser Voraussetzung zeigt der Verf., daß jedem Element  $\omega \in \mathfrak{o}$  eineindeutig eine

formale Potenzreihe zugewiesen werden kann:  $\omega \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(\eta_1, \dots, \eta_r)$  derart, daß  $\omega \equiv \sum_{i=0}^m \psi_i(\eta_1, \dots, \eta_r) (\mathfrak{p}_0^{m+1})$  für  $m = 0, 1, \dots$  gilt ( $\psi_i$  Formen  $i$ -ten Grades). Diese

Elemente  $\eta_1, \dots, \eta_r$  heißen „uniformisierende Parameter für die ganze Umgebung des Punktes  $P''$ “. Die bezeichnete Entwicklungsmöglichkeit ist charakteristisch für Primideale  $\mathfrak{p}_0$ , die zu einfachen Punkten der  $V_r$  gehören; ja es genügt zu dieser Charakterisierung bereits die Gültigkeit der obigen Kongruenz für  $m = 0, 1$  und jedes  $\omega \in \mathfrak{o}$ , bzw. die Feststellung, daß der  $K$ -Modul  $\mathfrak{p}_0/\mathfrak{p}_0^2$  den Rang  $r$  habe. Der Verf. folgert (im Falle eines einfachen Punktes  $P$ ) weiter, daß es Elemente  $\omega \in \mathfrak{o}$  gibt, für welche die Differenten  $F'(\omega)$  bezüglich des Körpers  $K(\eta_1, \dots, \eta_r)$  nicht in  $\mathfrak{p}_0$  liegt; daher kann die Mannigfaltigkeit der singulären Punkte der  $V_r$  durch ein Ideal bestimmt werden, welches alle Differenten  $F'(\omega)$  enthält  $[\omega, \eta_1, \dots, \eta_r]$  beliebig in  $\mathfrak{o}$ ,  $\eta$  ganz abhängig von  $K(\eta_1, \dots, \eta_r)$ ]. — Für eine tiefergehende Untersuchung ist das Studium der bezüglich  $\mathfrak{o}$  ganzen Elemente von  $\Sigma$  ausschlaggebend. Es sei  $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}^* \subset \Sigma$  und  $\mathfrak{o}^*$  ganz abgeschlossen bezüglich  $\mathfrak{o}$ ,  $c(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}^*)$  das Führerideal in  $\mathfrak{o}$  bez.  $\mathfrak{o}^*$ ; dann ist das Erweiterungsideal  $\mathfrak{o}^* \mathfrak{p}_0$  eines nulldimensionalen Primideals  $\mathfrak{p}_0$  dann und nur dann wieder prim, wenn  $c(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}^*) \not\equiv 0(\mathfrak{p}_0)$  ist, d. h.  $c(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}^*)$  ist durch diejenigen Primideale  $\mathfrak{p}_0$  teilbar, deren Erweiterungs Ideale in  $\mathfrak{o}^*$  nicht mehr prim sind. — Der Verf. definiert normale Mannigfaltigkeiten (im affinen und im projektiven Raum) als solche, für welche der Ring  $\mathfrak{o}$  (m. a. W. der Restklassenring des betreffenden Polynomideals) ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper  $\Sigma$  sei. Eine normale  $V_r$  kann keine singuläre  $V_{r-1}$  enthalten. Vor allem kann eine normale  $V_r$  in einem projektiven Raum  $P_n$  nicht die Projektion einer birational äquivalenten  $V'_r$  desselben Grades sein, welche in einem  $P_{n'}$  ( $n' > n$ ) eigentlich liegt. Damit ist der Anschluß zum Begriffssystem der algebraischen Geometrie gewonnen, und es kann die Theorie der linearen Scharen entwickelt werden. Verf. zeigt zum Schluß, daß in jeder Klasse birational äquivalenter Mannigfaltigkeiten immer auch normale Mannigfaltigkeiten existieren.

W. Gröbner (Rom).

**Villa, M.:** Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$ . I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 28, 365—370 (1939).

**Villa, M.:** Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$ . II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 28, 395—402 (1939).

Es seien:  $C_{r,v}$  der Kegel, der aus einem  $S_r$ , die Bildmannigfaltigkeit  $V_r^{2r}$  der Quadriken eines Raumes  $S_r$  projiziert, und  $\Phi_k^{r,v}$  eine allgemeine auf  $C_{r,v}$  liegende  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\left(r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r + v\right)$ . Verf. beweist, daß  $\Phi_k^{r,v}$  genau  $\infty^{2(2k-r-1)-v}$

$E_2$  von Quasiasymptotenlinien  $\gamma_{13}$  enthält: diese  $E_2$  lassen sich auf Kurven  $\gamma_{13}$  anordnen, die von  $2k - 2r - v - 1$  willkürlichen Funktionen abhängen. Durch diese Eigenschaft werden die  $\Phi_k^{r,v}$  unter den  $V_k$  charakterisiert, welche auf den Kegeln liegen, die



eine  $V_r$  aus  $S_r$  projizieren. Außerdem sind die gesamten  $\gamma_{13}$  von  $\Phi_k^r$  die  $\gamma_{13}$  der Schnittmannigfaltigkeiten von  $\Phi_k^r$  mit den auf  $C_r$  liegenden Kegeln 2. Ordnung. Ferner sind alle  $E_2$  von  $\gamma_{13}$  auf  $\Phi_k^r$  auch  $E_2$  von  $\gamma_{13}$  auf den zu  $\Phi_k^r$  angehörigen  $\Phi_{k-p}^r$ . Es werden auch besondere Werte von  $r$  ( $r = 2$ ) und  $k$  ( $k = 3, 4$ ) betrachtet. P. Buzano.

**Spampinato, Nicolò:** Sulla geometria dell'  $S_r$  biduale proiettivo. Accad. naz. Lincei, Mem., VI. s. 7, 241—296 (1938).

Es gibt nur zwei Algebren zweiter Ordnung über dem Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen, die eine Einheit besitzen, nämlich die Algebra der bikomplexen und die der bidualen Zahlen. Die bidualen Zahlen haben die Form  $z = xu + y\varepsilon$ , wo  $x, y$  gewöhnliche komplexe Zahlen und  $u, \varepsilon$  Einheiten sind, für die  $u^2 = u$ ,  $u\varepsilon = \varepsilon u = \varepsilon$ ,  $\varepsilon^2 = 0$  ist. Die mit diesen beiden Algebren definierten projektiven Räume  $S_r$  (vgl. dies. Zbl. 14, 340) sind der bikomplexe  $S_r$  und der biduale  $S_r$ . Diese beiden Räume wurden von C. Segre eingeführt (Math. Ann. 40, 413; Atti Accad. Sci. Torino 47, 308, 384). Verf. beschäftigt sich mit dem bidualen  $S_r$  (den bikomplexen  $S_r$  hat er in einer früheren Arbeit untersucht; dies. Zbl. 15, 317) und stellt zunächst eine bedeutsame Abbildung des bidualen  $S_r$  mittels eines  $2r$ -dimensionalen algebraischen Systems  $\Gamma$  von Geraden eines gewöhnlichen komplexen  $S_{2r+1}$  her. Es erhellt daraus, daß der biduale  $S_r$  aus  $\infty^r$  komplexen euklidischen  $S_r$ , den erzeugenden  $S_r$ , aufgebaut ist; faßt man diese als Elemente auf, so bildet ihre Gesamtheit einen projektiv komplexen  $S_r$ , der mit  $(S_r)$  bezeichnet wird. Im bidualen  $S_r$  gibt es außer den Punkten, die zu Koordinaten die  $r + 1$ -Tupeln der Charakteristik 2 haben, die sogenannten Bipunkte, die zu Koordinaten die  $r + 1$ -Tupeln vom Range 1 haben; jeder Punkt bestimmt einen Bipunkt, und die zu dem gleichen Bipunkt gehörigen Punkte bilden einen erzeugenden  $S_r$ . Die hyperalgebraischen (speziell algebraischen) Mannigfaltigkeiten des bidualen  $S_r$  werden als diejenigen Mannigfaltigkeiten  $V_d$  erklärt, die durch ein algebraisches Geradensystem aus  $\Gamma$  von der komplexen Dimension  $d$  abgebildet werden; für jede hyperalgebraische Mannigfaltigkeit werden fünf Charaktere angegeben, die bezüglich der Gruppe der Projektivitäten des bidualen  $S_r$  invariant sind. Verf. untersucht insbesondere die algebraischen Mannigfaltigkeiten der komplexen Höchstdimension  $2r - 1$ , das sind die algebraischen Bihyperflächen, für die im bikomplexen Raum kein Analogon existiert, und dann die algebraischen Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension  $2r - 2$ , das sind die algebraischen Hyperflächen. Die algebraischen Bihyperflächen und Hyperflächen werden durch eine Gleichung  $f(z_1, z_2, \dots, z_{r+1}) = 0$  dargestellt, wo  $f$  ein homogenes Polynom  $n$ -ten Grades ( $n$  ist die Ordnung der Mannigfaltigkeit) in den bidualen Variablen  $z_i$  mit bidualen Koeffizienten ist; letztere sind für die Bihyperflächen sämtlich Nullteiler und für die Hyperflächen nicht sämtlich Nullteiler. Zu jeder algebraischen Hyperfläche gehört eine algebraische Bihyperfläche, nämlich der Ort der erzeugenden  $S_r$ , die durch die Punkte der Hyperfläche bestimmt werden. Betrachtet man die algebraischen Bihyperflächen als Mannigfaltigkeiten von erzeugenden  $S_r$ , so sind sie Hyperflächen des  $(S_r)$ , und die algebraischen Hyperflächen des bidualen  $S_r$  werden aus  $\infty^{r-1}$  komplexen euklidischen  $S_{r-1}$  gebildet, die beziehungsweise den erzeugenden  $S_r$  der von ihnen bestimmten Bihyperflächen angehören. Für  $n = 1$  hat man die Hyperebenen und die Bihyperebenen. Es werden auch die Singularitäten der algebraischen Hyperflächen und die sie berührenden bidualen Geraden studiert; außer den Singularitäten, die zu denen einer gewöhnlichen Hyperfläche analog sind ( $s$ -fache Punkte), können auch Singularitäten auftreten, die der Verf. als bi- $s$ -fache Punkte bezeichnet. Andere Ergebnisse beziehen sich auf die Bedeutung der Ordnung einer algebraischen Hyperfläche, auf den Schnitt zweier hyperalgebraischer Mannigfaltigkeiten, auf die hyperalgebraischen und algebraischen Hyperflächen, für die man übrigens zwei Arten von Reduzibilität unterscheiden muß, nämlich die algebraische und die hyperalgebraische, und schließlich auf die Kegelschnitte der bidualen Ebene.

Mario Villa (Milano).



**Marletta, Giuseppe:** Nell'  $S_r$  i  $k$ -complessi lineari di rette. Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. 3, Mem. 24, 1—16 (1939).

In einem Raume  $S_r$  nennt man Ordnung eines algebraischen  $\infty^k$  Geradensystems  $C$  die Ordnung der  $V_{k-r+2}$ , Ort der  $\infty^{k-r+1}$  Geraden von  $C$ , die durch einen Punkt allgemeiner Lage hindurchgehen;  $i$ -Klasse des Systems  $C$  ( $1 \leq i \leq r-h-1$ , wobei entweder  $k=2h$  oder  $k=2h-1$  ist) bedeutet die Ordnung der  $V_{2r-k-2i-1}$ , Ort der  $\infty^{2r-k-2i-2}$  Geraden von  $C$ , die einem  $S_{2r-k-i-1}$  allgemeiner Lage angehören. In dieser Abhandlung werden die linearen Geradenkomplexe betrachtet, d. h. diejenigen Systeme  $C$ , für welche die Ordnung und alle Klassen den Wert 1 haben. Wenn  $r-1 \leq k \leq 2r-3$  ist, besteht  $C$  im allgemeinen aus allen Geraden, die zwei windschiefe Räume geeigneter Dimensionen treffen (diese Dimensionen sind beide  $h$  oder haben die Werte  $h-1$  und  $h$ , je nachdem  $k=2h$  oder  $k=2h-1$ ). Als besonderer Fall können jene zwei Räume zusammenfallen oder der eine im anderen liegen;  $C$  kann dann durch eine auf einer geeigneten Projektivität begründete Konstruktion erzeugt werden, die der wohlbekannten Konstruktion der speziellen linearen Strahlenkongruenz des gewöhnlichen Raumes ähnlich ist. Im Falle  $k=2r-4$  ist  $C$  die Basismannigfaltigkeit eines Büschels linearer  $\infty^{2r-3}$  Strahlenkomplexe; dieser Fall wird besonders untersucht (Orter der singulären Punkte der Komplexe des Büschels, Orter der Hyperbenen, die solchen singulären Punkten entsprechen, usw.). Die Beweismethoden sind rein synthetisch und auf das Induktionsverfahren gestützt. *E. G. Togliatti.*

**Snyder, Virgil, and Evelyn Carroll-Rusk:** A Cremona involution in  $S_3$  without a surface of invariant points. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 141—144 (1939).

Ein Büschel von Quadriken  $H_1(x) - \lambda H_2(x) = 0$  und eine  $\infty^1$  Geradenschar  $(ax) = (bx) = 0$  sind gegeben; die  $a_i$  und  $b_i$  sind Polynome in der Veränderlichen  $\lambda$  mit den Graden  $m_1, m_2$ ; jeder Quadrik des Büschels entspricht so eine Gerade der Schar. Es seien dann  $y$  ein beliebiger Punkt des Raumes,  $H$  die Quadrik des Büschels, die durch  $y$  hindurchgeht,  $g$  die Gerade der Schar, die der Quadrik  $H$  entspricht,  $g'$  die Polare von  $g$  in bezug auf  $H$ , und  $t$  die Gerade, die  $y$  enthält und  $g, g'$  trifft; dem Punkt  $y$  läßt man den zweiten Schnittpunkt  $y'$  von  $H$  mit  $t$  entsprechen. Die so definierte Cremonasche Involution  $I$  besitzt keine Fläche von Fixpunkten; sie hat die Ordnung  $4(m_1 + m_2) + 5$ ; als Fundamentelemente erscheinen die Basiskurve  $C^4$  des Büschels und die Punkte, wo eine Quadrik des Büschels von der betreffenden Geraden  $g$  berührt wird. — Fall, wo  $m_1 = 0$  oder  $m_2 = 0$ . — Abbildung von  $I$  auf einen Raum. *E. G. Togliatti (Genova).*

**Cassity, C. Ronald:** The maps determined by the principal curves associated with five and six points in the plane. Duke math. J. 5, 146—163 (1939).

Aus der Theorie der Cremonaverwandtschaften ist bekannt, daß  $n$  Punkte allgemeiner Lage ein System von Hauptkurven bestimmen. Diese teilen die projektive Ebene in Gebiete ein, die Einteilungen werden für  $n=5$  und  $n=6$  untersucht. Während im Fall  $n=4$  die Einteilung größte Symmetrie besitzt, tritt für  $n=5$  nur noch Halbregularität ein unter den durch die 16 Hauptkurven begrenzten Gebieten. Diese werden mittels der rationalen Fläche im  $R_4$  untersucht, und die zugehörige Gruppe wird angegeben. Für  $n=6$  fehlt der durch die 27 Hauptkurven, die den 27 Geraden auf der kubischen Fläche entsprechen, hervorgebrachten Einteilung jede Symmetrie. Die einzelnen Gebiete werden beschrieben und gezeigt, daß es nur eine einzige Konfiguration gibt, die der kubischen Fläche zugeordnet ist. Am Ende wird ein Ergebnis einer dasselbe Thema betreffenden Arbeit von Zeuthen (Math. Ann. 8) richtiggestellt.

*J. J. Burckhardt (Zürich).*

### Differentialgeometrie:

**Hoborski, A.:** Über sphärische Kurven. Mathematica, Cluj 15, 5—7 (1939).

The A. gives a very simple demonstration and completes the results of Al. Niculescu (this Zbl. 15, 229), regarding the curves  $C$  situated over a sphere. If we indicate with  $r$  the vector  $OM$ , when  $O$  is the center and  $M$  a point of the sphere, it is



shown that the curves  $C$  are characterised by the differential equation

$$r'' + r + v \cdot r \wedge r' = 0, \quad v^2 = k_g^2, \quad k^2 = 1 + k_g^2,$$

when  $\wedge$  indicates vectorial product, and  $k, k_g$  curvature and geodesic curvature of  $C$ . For  $v = k_g = 0$ , we find the big circles of the sphere. *G. Vranceanu* (Cernăuți).

**Behari, Ram:** A note on Laguerre's function. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 3, 202—204 (1939).

Bedeutung für eine Flächenkurve  $R, \tau, \gamma$  die Radien der Normalkrümmung, der geodätischen Torsion und der geodätischen Krümmung, ferner  $x, y, z$  die Koordinaten des Flächenpunktes und  $X, Y, Z$  die Komponenten der Flächennormalen, so wird gezeigt, daß die Laguerresche Funktion

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{2}{\tau} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

auch durch den Ausdruck  $\sum X''x' - X'x''$  dargestellt werden kann. Der Nachweis erfolgt aus der Formel von Olinde Rodrigues durch Ausrechnung. *Heinrich Schatz*.

**Hatzidakis, N.:** Bemerkung zur Arbeit: Die Realität der Hauptkrümmungsradien und Krümmungslinien einer Fläche, samt einer weniger bekannten Form für die Differentialgleichung der Krümmungslinien. *Norsk mat. Tidsskr.* 21, 12—14 (1939) [Norwegisch].

Variante des Beweises von Saether (dies. Zbl. 20, 64). Sind  $E_s, F_s, G_s$  die Fundamentalgrößen der Gaußschen sphärischen Abbildung, so kann man die Differentialgleichung der Krümmungslinien als Determinante aus  $L, M, N; E_s, F_s, G_s$ ; und  $dv^2, -du \cdot dv, du^2$  schreiben. *Harald Geppert* (Gießen).

**Kalicun-Chodowicki, B.:** Beitrag zur Anwendung der kinematischen Geometrie zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte der ebenen Schnittkurven und der Haupttangente der windschiefen Regelflächen, die am meisten in der technischen Praxis vorkommen. *Prace mat.-fiz.* 45, 23—50 u. deutsch. Zusammenfassung 50 (1937) [Polnisch].

Mit Hilfe des oskulierenden hyperbolischen Paraboloides werden vom Verf. auf konstruktivem Wege die folgenden Aufgaben gelöst: 1. die Bestimmung des Krümmungsradius eines beliebigen ebenen Schnittes des einschaligen Hyperboloids, 2. die Bestimmung des Krümmungsradius eines normalen Schnittes der gewöhnlichen Schraubenfläche und der nichtabwickelbaren Schraubenfläche, 3. die Bestimmung der Haupttangente im gegebenen Punkte der Schraubenflächen und der Kreiskonoide. *Golab*.

**Garwick, Jan. V.:** Über Berührung. *Norsk mat. Tidsskr.* 21, 15—18 (1939) [Norwegisch].

Wenn zwei Flächen einander in einem regulären Punkte berühren, so kann die Ordnung ihrer Berührung definiert werden als die niedrigste Ordnung, in der zwei durch den Punkt gelegte ebene Normalschnitte der Flächen einander berühren. Sollen die Flächen eine Berührung von gerade  $n$ -ter O. eingehen, so ist für  $n > 1$  notwendig und hinreichend, daß die Flächen dieselbe Normale haben, daß die Krümmungslinien der einen die der anderen berühren, daß die Hauptkrümmungshalbmesser übereinstimmen, endlich daß die partiellen Ableitungen erster bis  $(n-2)$ -ter O. der beiden Hauptkrümmungshalbmesser nach den Bogenlängen der Krümmungslinien bei beiden Flächen dieselben Werte haben, während die Ableitungen  $(n-1)$ -ter O. für die eine Fläche nicht beide denen für die andere gleich sind. Merkwürdigerweise folgt erst hierauf eine ähnliche Definition für die Berührung  $n$ -ter O. zwischen zwei Raumkurven. Dabei würde es sich übrigens empfehlen, bei Berührung 3. und höherer O. nicht die Bogenlängen als unabhängige Veränderliche zu benutzen, sondern die Torsionshalbmesser. *Engel* (Gießen).

**Strubecker, K.:** Über die Eulersche Transformation. *C. R. Acad. Sci. Roum.* 3, 150—155 (1939).

Die Eulersche Transformation wird als Geraden-Kugel-Transformation des isotropen Raumes (vgl. K. Strubecker, dies. Zbl. 20, 66) behandelt. Untersucht wird das Entsprechen von Verwandtschaften vermöge der Transformation (es entsprechen Drehungen axiale Streckungen, einer Drehfläche entspricht also ein Konoid usw.) und das Entsprechen der im isotropen Raume erklärten Krümmungslinien einer Fläche



und der Haupttangentialkurven der transformierten Fläche. Dieser letzte Zusammenhang wird benutzt, um die Haupttangentialkurven einer Fläche 4. Ordnung mit zwei inzidenten Doppelgeraden und vier konischen Knotenpunkten zu bestimmen.

*E. A. Weiss (Bonn).*

**Calugaréano, Georges:** Sur les surfaces minima applicables sur des surfaces de révolution. *Mathematica, Cluj*, 15, 53—55 (1939).

En partant de la représentation intrinsèque des surfaces, considérée précédemment par l'A. et qui consiste à se donner, en fonction des coordonnées polaires géodésiques, les corbures, moyenne  $h$  et totale  $k$  de la surface, on considère ici le cas des surfaces minima ( $h = 0$ ), applicables sur les surfaces de révolution, quand on trouve que le coefficient  $g(r)$  de la première forme fondamentale  $ds^2 = dr^2 + g^2 d\phi^2$ , doit satisfaire à l'équation  $(\lambda + 1 - g + r)^2 = \lambda^2(\lambda + 1 - \lambda g + r)$ ,  $\lambda$  étant une constante, la valeur  $\lambda = -1$  correspondant à une cathénoïde.

*G. Vranceanu (Cernăuți).*

**Mitrinovitch, Dragoslav S.:** Sur le problème de Beltrami: Déformer une surface réglée de telle manière que l'une de ses courbes, assignée à l'avance, devienne plane. *Bull. Sci. math.*, II. s. 63, 99—105 (1939).

On sait que le problème de Beltrami, de déformer une surface réglée de manière que l'une de ses courbes, assignée à l'avance, devienne plane, dépend de l'intégration d'une équation différentielle qui peut être transformée dans l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = \Phi(x). \quad (1)$$

En tenant compte d'un résultat précédent de l'A., qui montre que l'équation (1) peut être transformée dans l'équation de la balistique extérieure

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \varrho(u)}, \quad (2)$$

dont on peut former tous les cas d'intégrabilités par quadratures, par la méthode d'intégration logique de J. Drach [*Ann. de l'Éc. N. S.* 37 (1920)], on montre par des formules simples, comment à chaque cas d'intégrabilité de (1), correspond un cas d'intégrabilité pour le problème de Beltrami.

*G. Vranceanu (Cernăuți).*

**Abramescu, Nicolas:** L'apolarité d'une forme binaire et d'une forme cubique. Application à la théorie des surfaces. *Mathematica, Cluj* 15, 192—197 (1939).

Conditions pour que deux formes binaires, l'une quadratique, l'autre cubique, soient apolaires. Application à la cubique située dans le plan tangent en un point  $O$  à une surface dont l'équation est formée des premiers termes de celle de la surface dans le voisinage du point  $O$ . Les droites joignant  $O$  aux points d'inflexion de cette cubique sont les tangentes de Darboux de la surface.

*L. Godeaux (Liège).*

**Mihăilescu, Tiberiu:** Sur une classe de réseaux à transformés de Laplace en correspondance asymptotique. *C. R. Acad. Sci. Roum.* 3, 121—124 (1939).

Étude d'une surface particulière ( $A$ ) telle que si  $r$  est une tangente de Darboux en un point  $A$  et  $A_1$  le second foyer de cette droite, les asymptotiques de la surface ( $A_1$ ) correspondent aux deux autres lignes de Darboux de la surface ( $A$ ). Le second foyer de la tangente de Segre conjuguée de  $r$  jouit de la même propriété. Cette propriété ne peut se présenter que pour les tangentes de Darboux et de Segre. Surfaces pour lesquelles la particularité précédente se présente pour deux lignes de Darboux.

*L. Godeaux (Liège).*

**Gheorghiu, Gheorghe Th.:** Sur les réseaux à invariants égaux. *Bull. Sci. École polytechn. Timișoara* 8, 183—190 (1939).

Étude des suites de Laplace de période  $n$  dont les réseaux sont à invariants égaux. L'auteur obtient les expressions paramétriques des coordonnées projectives homogènes du point générateur de chaque réseau, dans un espace projectif à  $n - 1$  dimensions. Il montre que dans le cas où  $n$  est impair, les coordonnées  $x^1, x^2, \dots, x^n$  du point générateur de chaque réseau satisfont à l'équation  $x^1 x^2 \dots x^n = 1$ . — Dans le cas où  $n$  est pair ( $n = 2p$ ), si l'on désigne par  $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$  les points décrivant



les réseaux de la suite, les réseaux  $(x_1), \dots, (x_{i-1}), (x_{i+1}), \dots, (x_{p+i-1}), (x_{p+i+1}), \dots, (x_{2p})$  appartiennent à une même variété quadratique. *L. Godeaux (Liège).*

**Kimpara, Makoto:** Sur les surfaces développables dans l'espace à connexion projective à trois dimensions. Mem. Ryojun Coll. Engng. 11, 270—274 (1938).

L'A. chiama sviluppabile una superficie, di uno spazio  $R_3$  a connessione proiettiva a tre dimensioni, quando ammette un solo sistema di curve asintotiche. In un punto  $P$  di una tale superficie  $S$  lo sviluppo di essa sullo spazio proiettivo tangente in  $P$  ha un contatto di secondo ordine con un cono di secondo grado (il cono osculatore a  $S$  in  $P$ ). L'A. determina dapprima le condizioni necessarie e sufficienti perchè le asintotiche di  $S$  siano geodetiche di  $R_3$ . Dimostra poi che gli spazi  $R_3$  tali che per ogni punto  $P$  passi una superficie  $S$  le cui curve asintotiche sono geodetiche di  $R_3$ , e in modo che  $S$  abbia per cono osculatore in  $P$  un cono arbitrariamente assegnato di cui  $P$  è punto ordinario, sono gli spazi geodeticamente rappresentabili sullo spazio proiettivo ordinario. *Mario Villa (Milano).*

**Tsuboko, Matsuji:** On a certain ruled hypersurface with a given curve of singularity in  $R_4$ . Mem. Ryojun. Coll. Engng. 11, 275—288 (1938).

A hypersurface  $\gamma$  in  $R_4$ , generated by  $\infty^1$  planes  $\tau$  is called a "ruled surface". A point  $P$  on  $\tau$  describes a curve as  $\tau$  generates the ruled surface. If the tangent line of this curve is contained in  $\tau$ ,  $P$  is termed "the primary characteristic" on  $\tau$ . — Let  $\Gamma(t)$  be a curve in  $R_4$  and  $S(t)$  its osculating space of three dimensions at the point  $t$ . The author considers the ruled surface  $\gamma$ , generated by a plane contained in the  $S(t)$  which osculates  $\Gamma$  at the primary characteristic on  $\tau$ . Starting with the equation of this hypersurface (obtained by means of the fundamental equations of  $\Gamma$ ) he considers the relations between the Darboux quadric and a cubic hypersurface associated with a point on  $\gamma$ . He shows f.i. that the Darboux hyperquadric  $Q$  has a contact of the third order with  $\Gamma$  at  $P$  and moreover if it has a contact of fourth order with  $\Gamma$  at  $P$ , then it contains the osculating plane at  $P$  of  $\Gamma$ . *Hlavatý (Praha).*

**Coburn, Nathaniel:** Surfaces in four-space of constant curvature. Duke math. J. 5, 30—38 (1939).

Eine Regelfläche ( $V_2$ ) in einem 4dimensionalen Raum konstanter Krümmung  $\kappa$  ( $S_4$ ) hat entweder axiale Punkte (vgl. Schouten-Struik II, S. 99) oder planare Punkte. Verf. zeigt, daß es im letzten Falle eine eindeutige Korrespondenz gibt zwischen dieser  $V_2$  in  $S_4$  und der  $V_2$  in einer  $S_3$  derselben skalaren Krümmung. Entsprechende  $V_2$  haben dieselben  $a'_{cb}$  und eine  $h_{cb}$  gemeinsam. Weiter betrachtet Verf. eine  $V_2$  (nicht notwendig eine Regelfläche) in  $S_4$  mit der Eigenschaft, daß das Krümmungsgebilde in jedem Punkte  $P$  eine Gerade ist, welche eine konstante Entfernung  $l$  von  $P$  hat. Auch diese  $V_2$  entsprechen den  $V_2$  einer  $S_3$  mit der Krümmung  $\kappa + l^2$ . *J. Haantjes.*

**Calapso, R.:** Sulle superficie isoterme. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. 1, 12—17 (1939).

Unter wiederholter Berufung auf Untersuchungen von P. Calapso wird gezeigt, daß die Bestimmung der isothermen Flächen des gewöhnlichen Raumes, die von drei konformen Invarianten abhängen, mit der Bestimmung der Netze mit der mittleren isotropen Krümmung Null im vierdimensionalen elliptischen Raum äquivalent ist. Ebenso besteht ein Zusammenhang zwischen den Flächen von C. Guichard und den Netzen im vierdimensionalen elliptischen Raum, bei denen die mittlere isotrope Krümmung konstant, aber von Null verschieden ist. *Heinrich Schatz (Innsbruck).*

**Goreux, R. P. F.:** La géométrie des sous-espaces. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 59, 44—52 (1939).

Es sei  $y^\alpha = \lambda^\alpha(x^i)$  die Gleichung einer

$$V_m \text{ in } V_n (h, i, j, \dots = 1, \dots, m; \quad \alpha, \beta, \dots = 1, \dots, n).$$

Verf. beweist die Formeln von Weingarten-Gauß unter Benutzung des Bezugssystems  $x^\alpha$ , definiert durch

$$y^\alpha = \lambda^\alpha(x^i) + q_p^\alpha x^p, \quad (p = m+1, \dots, n)$$

wo  $q_{(p)}^\alpha$   $n - m$  Vektoren senkrecht zur  $V_m$  sind.

*J. Haantjes (Amsterdam).*



**Tompkins, C.: Isometric embedding of flat manifolds in Euclidian space.** Duke math. J. 5, 58—61 (1939).

Es wird der folgende Satz bewiesen: Eine  $n$ -dimensionale abgeschlossene Mannigfaltigkeit  $V_n$  kann unter den folgenden Voraussetzungen 1., 2. in einen euklidischen Raum von weniger als  $2n$  Dimensionen nicht eingebettet werden: 1. Die  $V_n$  ist mittels der Frenetschen Formeln definierbar und erfüllt die Gaußschen Gleichungen, 2. die auf der  $V_n$  durch den umgebenden Raum induzierte Metrik ist eben. — Der schöne Beweis beruht auf zwei an sich bemerkenswerten Hilfssätzen über Matrizen. *O. Borůvka.*

**Bortolotti, Enea: Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 28, 224—230 (1939)

À côté des résultats insérés à Boll. Un. Mat. Ital. 17, 219—223 (1938) (voir aussi ce Zbl. 20, 70) l'auteur en expose beaucoup d'autres, relatifs à la théorie des transformations dualistiques par rapport à la géométrie projective différentielle. En voici des plus intéressants: Le tenseur quadratique introduit par l'auteur dans la Note citée de Bolletino donne naissance 1. à une corrélation qui fait correspondre la droite  $PP^*$  à l'intersection des hyperplanes correspondants  $\pi$  et  $\pi^*$  ( $P$  et  $P^*$  étant deux points infiniment voisins) et qui de plus peut être envisagée comme généralisant la polarité de M. Čech dans la géométrie projective différentielle des hypersurfaces; 2. à une polarité par rapport à un cône qui joue le rôle du cône asymptotique dans la théorie des hypersurfaces. En outre, des équations analogues aux équations fondamentales de la théorie des hypersurfaces sont construites. *Hlavatý (Praha).*

**Wagner, V.: On the geometrical interpretation of the curvature vector of a non-holonomie  $V_3^2$  in the three-dimensional Euclidean space.** Rec. math., Moscou, N. s. 4, 339—356 (1938) [Russisch].

To give a non holonomic space  $V_3^2$  in the euclidean space  $S_3$  with three dimensions, is equivalent to give in any point of  $S_3$  a plane, the tangent plane of  $V_3^2$ . The properties which depend only of this plane and the metric induced over this plane by  $S_3$ , are intrinsic properties of  $V_3^2$ . If we give also a normal direction and a metric on this normal, we get rigid properties of  $V_3^2$ . Therefore it is possible to associate, in a invariantive way, to a intrinsic  $V_3^2$ , a rigid  $V_3^2$  and then a metric in three variables, but this metric is in general not euclidean. The author considers a rigid  $V_3^2$  (see also this Zbl. 12, 318), by assuming as given also the normal in  $S_3$ , to the tangent plane of  $V_3^2$ , and finds, by the use of the methods of vector analysis from Marcolongo, Burali-Forti, etc., geometric interpretations of the parallelism and the curvature. The geometric interpretation of the curvature is analogous to that given by the formula of Pérès, which said that the curvature of a surface in a point, is the limit of the rapport of the angular variation of a direction transported by parallelism along a closed curve, to the area included by the curve. Analogous formulas are given in the reviewers "Étude des espaces non holonomes" (dies. Zbl. 9, 377). *G. Vranceanu (Cernăuți).*

**Wagner, V.: Über  $V_3^2$  von der Krümmung Null in  $R_3$ .** Rec. math., Moscou, N. s. 4, 333—337 (1938) [Russisch].

Wenn die Parallelübertragung in  $V_3^2$  in  $R_3$  von dem Übertragungswege nicht abhängt, dann ist  $V_3^2$  „von Krümmung Null“. Die n. u. h. Bedingung dafür, daß eine gegebene  $V_3^2$  von Krümmung Null sei, ist, daß sie ein orthogonales geodätisches Netz enthält. (Wegen der Analogie mit der Flächentheorie wäre es zu erwarten, daß dies schon für ein geodätisches isogonales Netz auftritt, was jedenfalls bewiesen werden müßte. Ref.) Daraus folgt, daß man alle solche  $V_3^2$  in  $R_3$  bekommt, wenn man alle möglichen Paare von Kurvenkongruenzen in  $R$  ausfindig macht, deren Kurven sich in jedem Punkte orthogonal durchsetzen und dort die gemeinsame Hauptnormale besitzen. Jede nichtzyklindrische, nichtisotrope Geradenkongruenz läßt sich in (zwei verschiedene)  $V_3^2$  von Krümmung Null parallel einbetten. Diese Einbettung findet nur in dem Raumteile statt, der von den beiden Schalen der Grenzfläche der Kongruenz begrenzt wird. *Hlavatý (Praha).*



Maxia, A.: Varietă anolonomie immerse in una varietă a conexiune affine. Čas. mat. fys. 68, 33—49 (1939).

Unter Zugrundelegung der Schoutenschen Symbolik untersucht Verf. das Existenzproblem zweier komplementärer nicht holonomer Mannigfaltigkeiten  $X_n^m, X_n^{n-m}$ , die keine gemeinsamen Richtungen haben, in einem Raum  $A_n$  mit linearer Übertragung, wenn die Eulerschen Krümmungstensoren und die innere Übertragung der  $X_n^m$  und  $X_n^{n-m}$  entweder direkt oder als vom Umgebungsraum induziert vorgegeben sind. Das Problem hängt von der Existenz der Lösungen eines gewissen totalen Differentialsystems ab, das von einer linearen Übertragung des Raumes  $A_n$ , der starr mit den nicht holomonen Mannigfaltigkeiten  $X_n^m, X_n^{n-m}$  verbunden ist, geliefert wird. Die so entstehenden Gleichungen kann man als Verallgemeinerungen der für holonome Mannigfaltigkeiten geltenden Gleichungen von Gauß, Codazzi und Ricci auffassen. Das Problem hängt mit der von verschiedenen Verfassern betrachteten Bestimmung der starren Tensoren von  $X_n^m$  oder  $X_n^{n-m}$  zusammen; einen Bericht hierüber nach der Methode der Kongruenzen findet sich in der Schrift des Ref. „Les espaces non holonomes“, Mem. Sci. math. 76. G. Vranceanu (Cernăuți).

Ślebodziński, W.: Sur la connexion rhéonome et sur un problème de l'équivalence. Prace mat.-fiz. 45, 75—91 (1937).

Der Verf. unternimmt es, für die von M. Wundheiler entwickelte rhéonome Geometrie (dies. Zbl. 5, 412) einen von ihm neu gefundenen Zugang zu skizzieren. Die rhéonome Geometrie ist mit einer quadratischen Form

$$\psi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j - 2 \sum_{i=1}^n u_i dx_i dt + a dt^2$$

( $a_{ij}, u_i, a$  Funktionen von  $x_i, t$ ) invariant verknüpft unter Zugrundelegung der unendlichen Gruppe der kinematischen Transformationen  $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n, t)$ ,  $\bar{t} = t$ . In Nr. 4 seiner Arbeit denkt sich der Verf. die Form  $\psi$  als Summe von Quadraten dargestellt

$$\psi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (dx_i - u_i dt) (dx_j - u_j dt) + A dt^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 + \omega^2, \quad (1)$$

wo  $\omega = \sqrt{A} dt$  und die  $\omega_i$  linear und homogen in den  $dx_i - u_i dt$  sind. Anschließend wird bewiesen, daß man  $n^2$  lineare Formen  $\omega_{ij}$  und  $n$  alternierende Bilinearformen  $\Omega_i$  eindeutig so bestimmen kann, daß die Gleichungen

$$\omega'_i + \sum_{j=1}^n [\omega_{ij} \omega_j] = \Omega_i, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad \Omega_i = \sum_{j=1}^n \eta_{ij} [\omega_j dt], \quad \eta_{ij} = \eta_{ji} \quad (2)$$

erfüllt sind; dabei bedeutet  $f' = df - \delta f$  die äußere Ableitung Cartans. Jedem Punkt  $M$  der Mannigfaltigkeit  $(x_i, t)$  wird sodann ein  $n+1$ -dimensionaler euklidischer Raum mit der Gruppe

$$\bar{x}_i = \sum_{r=1}^n a_{ir} x_r + a_i, \quad \bar{t} = t; \quad \sum_{r=1}^n a_{hr} a_{ir} = \sum_{r=1}^n a_{rh} a_{ri} = \delta_{hi} \quad (\delta_{hi} = 0, 1 \text{ für } h \neq, = i) \quad (3)$$

zugeordnet; die  $a$  sind dabei konstante Parameter. Dieser Raum wird auf ein Achsenkreuz mit  $n+1$  Einheitsvektoren  $\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_n, \bar{I}$  bezogen gedacht. Die zu zwei unendlich benachbarten Punkten zugeordneten Achsenkreuze sollen durch folgende Vektorgleichungen zusammenhängen:

$$d\bar{M} = \omega_1 \bar{I}_1 + \dots + \omega_n \bar{I}_n + \omega \bar{I}, \quad d\bar{I}_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ji} \bar{I}_j, \quad d\bar{I} = 0. \quad (4)$$

Der geometrische Inhalt dieses Zusammenhanges und seiner Strukturgleichungen

$$\omega'_i + \sum_{j=1}^n [\omega_{ij} \omega_j] = \Omega_i, \quad \omega' = \Omega, \quad \omega'_{ij} + \sum_{r=1}^n [\omega_{ir} \omega_{rj}] = \Omega_{ij} \quad (5)$$

ist dann nichts anderes als die rhéonome Geometrie Wundheilera. Wie man nun überhaupt auf die Relationen der Form (2), (4), (5) geführt wird, legt der Verf. in den voran-



gehenden Nr. 1—3 dar. In 3 wird gezeigt, daß man zu einem simultanen System von Differentialgleichungen  $dx_i/dt = u_i(t, x_1, \dots, x_n)$  durch Relationen der Form (4) stets einen Zusammenhang konstruieren kann, welcher zu diesem System unter Zugrundelegung der unendlichen Gruppe (3) kovariant ist, wenn jetzt die  $a$  als Funktionen von  $t$  angesehen werden. Dabei ist speziell

$$(a) \quad \omega_i = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} (dx_r - u_r dt) \quad (b) \quad \sum_{r=1}^n \alpha_{hr} \alpha_{ir} = \sum_{r=1}^n \alpha_{r\bar{h}} \alpha_{ri} = \delta_{hi} \quad (6)$$

und die Strukturgleichungen dieses Zusammenhanges besitzen im wesentlichen die Gestalt (2), (5). In der vorbereitenden Nr. 2 wird nach den von Cartan ausgedachten Methoden die Frage der Äquivalenz zweier Systeme Diffgl.  $dx_i/dt = u_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ,  $d\bar{x}_i/d\bar{t} = \bar{u}_i(\bar{t}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) bezüglich der unendlichen Gruppe (3) auf die Frage nach der Äquivalenz gewisser Pfaffscher Systeme zurückgeführt, nachdem in Nr. 1 die Gleichungen dieser Gruppe in der Differentialform  $t = t$ ,  $\bar{\omega}_i = \omega_i \left( \omega_i = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} dx_r + \alpha_i dt \right)$  dargestellt worden sind, wo die  $\alpha_{ir}$  die Bedingungen (6b) befriedigen.

W. Neumer (Worms).

**Hombu, Hitoshi:** Die projektive Theorie eines Systems der „paths“ höherer Ordnung. II. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 7, 35—94 (1938).

Der Verf. untersucht die Lösungskurven („paths“) des Systems

$$\frac{d^m x^i}{dt^m} + H^i \left( t, x, \dots, \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} \right) = 0. \quad (1)$$

Die bahntreue Transformation hat hier die Gestalt

$$\bar{H}^i = H^i + \varrho \frac{dx^i}{dt}, \quad \left( \varrho \equiv \varrho \left( t, x, \dots, \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} \right) \right) \quad (2)$$

und führt auf den Begriff der projektiven Verwandtschaft entsprechender Systeme der „paths“. Ausgehend von einem System von Skalaren (welche man aus den Grundübertragungen in der affinen Theorie gewinnt), gelingt es dem Verf., das „ausgezeichnete, projektiv invariante System“

$$\frac{d^m x^i}{dt^m} + \S^i = 0 \quad (3)$$

zu konstruieren, welches mit (1) projektiv verwandt ist. Dadurch wird die projektive Theorie (das Äquivalenzproblem, das Problem der Differentialkommittenten usw.) von (1) auf die projektive Theorie von (3) zurückgeführt. — Die Arbeit wird mit einer Anwendung auf die Theorie des Kawaguchischen Raumes beendet. — Wegen der Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Hlavatý* (Praha).

**Kasner, Edward, and John de Cicco:** Quadric fields in the geometry of the whirl-motion group  $G_6$ . Amer. J. Math. 61, 131—142 (1939).

Von Kasner ist 1911 der Begriff der Turbine als Gesamtheit der von den Punkten eines Kreises gleichwinklig ausgehenden Linienelemente eingeführt worden. Für die Turbinengeometrie ist nun eine Gruppe von 6 Parametern  $G_6$  wichtig, die durch Komposition der Gruppe aller ebenen Bewegungen mit der aller Elementtransformationen erhalten wird, die die Geraden der Linienelemente in sich verschieben und um einen festen Winkel drehen. Durch Einführung geeigneter Koordinaten lassen sich nun alle Linienelemente der Ebene auf die Punkte eines projektiven  $R_3$  abbilden, so daß den Geraden des  $R_3$  die Turbinen und den Ebenen gewisse  $\infty^2$ -Scharen von Linienelementen entsprechen, die der Verf. „flat fields“ nennt.  $G_6$  ist dabei eine Untergruppe der gesamten projektiven Gruppe des  $R_3$ . In dieser Arbeit wird nun untersucht, welche Elementgesamtheiten den Quadriken des  $R_3$  dabei entsprechen. Diese Gesamtheiten spalten sich bez. der Gruppe  $G_6$  in 9 verschiedene Klassen auf, wie vom Verf. ohne Beweis angegeben wird. In den einzelnen Klassen sind stets gewisse ausgezeichnete Elementfelder enthalten, die aus den Tangentialelementen gewisser einfacher Kreisscharen bestehen und bei der Diskussion jedes Falles mit angegeben werden. *Bureau*.



**Strubecker, Karl:** Transformationstheorie der Komplexe [(11) (112)]. *Mathematica, Cluj* 15, 135—156 (1939).

Diese Abhandlung und andere, die dieser folgen werden, enthalten die Ausdehnung einer wohlbekannten Theorie von S. Lie, der Transformationstheorie der Mongeschen Differentialgleichung eines allgemeinen tetraedralen Komplexes, auf andere Strahlenkomplexe. Hier werden folgende quadratische Komplexe betrachtet:  $p_2^2 + \lambda p_1 p_4 = 0$ ; die die Segresche Charakteristik [(11) (112)] besitzen. Sie gestatten eine  $G_4$  von projektiven Automorphismen; ihre Transformationstheorie stützt sich aber auf folgende Untergruppe  $G_3$ :

$$x'_0 = a_0 x_0, \quad x'_1 = a_1 x_0 + a_0 x_1, \quad x'_2 = a_2 x_2, \quad x'_3 = a_3 x_2 + a_2 x_3;$$

welche durch ein System hyperkomplexer Zahlen  $x = \sum x_i e_i$ ,  $a = \sum a_i e_i$  mit vier Einheiten  $e_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) und einer geeigneten Produkttafel folgendermaßen analytisch ausgedrückt werden kann:  $x' = xa$ . Die Einheit der  $G_3$  entspricht der Zahl  $e_0 + e_2$ . An Stelle der logarithmischen Abbildung von S. Lie erscheint hier die Transformation:  $\xi = x$ ,  $\eta = \log y$ ,  $\zeta = z/y$ , die die betrachtete  $G_3$  in die  $G_3$  der Translationen überführt, und der Mongeschen Gleichung jener Komplexe die andere Gleichung  $d\eta^2 + \lambda d\xi d\zeta = 0$  entsprechen läßt. — Im 2. Kap. werden, wie bei S. Lie, alle Komplexkurven bestimmt, und ihre „Gattung“ durch eine Funktion  $F(t)$ , die willkürlich bleibt, definiert;  $F(t) = m$ , wo  $m$  eine Konstante bedeutet, liefert gewisse „ausgezeichnete“ Komplexkurven. Es bleiben noch die Bahnkurven der eingliedrigen Untergruppen der  $G_3$  ausgeschlossen, welche eine besondere Stellung annehmen. — Im 3. Kap. bemerkt Verf., daß die Ähnlichkeiten  $\xi = m\xi'$ ,  $\eta = m\eta'$ ,  $\zeta = m\zeta'$  eine eingliedrige Gruppe nichtlinearer Automorphismen der betrachteten Komplexe liefern; den Ebenen lassen sie eine Art Regelflächen entsprechen, die alle der Regelfläche  $\Gamma \equiv x_0^{m-1} x_3^m + (-1)^{m-1} x_1^m x_2^{m-1} = 0$  projektiv sind; solche Regelflächen ersetzen die tetraedralsymmetrischen Flächen der Lieschen Theorie und können auch als Wendelflächen in einer geeigneten Cayleyschen Maßbestimmung aufgefaßt werden. — Im IV. Kap. werden die Komplexkurven und die Haupttangentialkurven auf  $\Gamma$  konstruiert; die ersten bilden ein konjugiertes Netz. — Schließlich im V. Kap., werden die kubischen Regelflächen als besondere Fälle der Regelflächen  $\Gamma$  untersucht; man erhält sie viermal, d. h. für vier Werte von  $m$ :  $m = 2, -1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ ; der Fall  $m = -1$  erweist sich als besonders interessant.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Wunderlich, Walter:** Über ein besonderes Dreiecksnetz aus Kreisen. *S.-B. Akad. Wiss. Wien* 147, 385—399 (1938).

Während alle geradlinigen Dreiecksnetze durch die Untersuchungen von Graf und Sauer (*S.-B. Akad. Wiss. München* 1924, 119—156) bekannt sind, ist die Frage nach den allgemeinsten Dreiecksnetzen aus Kreisen noch nicht beantwortet. Man kennt lediglich Beispiele spezieller Dreiecksnetze aus Kreisen. Als neues Beispiel dieser Art wird in der vorliegenden Arbeit das Dreiecksnetz behandelt, das von doppelt berührenden Kreisen einer zweiteiligen bizirkularen Quadrik oder zirkularen Kubik vom Geschlecht 1 erzeugt wird; die Kreismittelpunkte liegen auf konfokalen Kegelschnitten. Unter den Sonderfällen ist besonders bemerkenswert das von den doppelt berührenden Kreisen und den Tangenten eines Mittelpunktkegelschnittes aufgebaute Dreiecksnetz.

*R. Sauer* (Aachen).

**Lipka, Stephan:** Über Kegelschnittnetze. *Mat. termézet. Értes.* 58, 20—34 u. deutsch. Zusammenfassung 25 (1939) [Ungarisch].

Ein Kegelschnittdreiecksnetz wird von Sauer und Baier (*Jber. Deutsch. Math.-Verein.* 43; dies. Zbl. 8, 171) als eine in einem Teilbereich der projektiven Ebene liegende Dreiecksconfiguration mit den folgenden Eigenschaften definiert: a) Die Dreiecksseiten sind Bögen von durchlaufenden Kegelschnitten, die nicht alle zerfallen; die Dreieckswinkel sind von 0 und  $\pi$  verschieden. b) Die Dreiecke sind so angeordnet, wie in einem aus einem quadratischen ebenen Gitter und einer Diagonalschar bestehenden geradlinigen Dreiecksnetz. c) Je drei in einer Netzecke sich schneidende Kegelschnitte



gehören einem Büschel an. — Verf. beweist, daß ein den vorigen Bedingungen genügendes Kegelschnittdreiecksnetz auf vier Kegelschnittbüschel zerfällt. *Gy. v. Sz. Nagy.*

Sauer, Robert: Metrische Fragen der Gewebegeometrie. *Math. Z.* 45, 265—288 (1939).

Zwei Figuren in einem Sechseckgewebe heißen äquivalent, wenn sie durch eine Selbstabbildung des Gewebes auseinander hervorgehen, der in der Abbildung des Gewebes auf drei Parallelscharen eine Parallelverschiebung entspricht. Eine Deformation eines Sechseckgewebes heißt Längentreu in bezug auf eine aus Kurvenzügen aufgebaute Figur, wenn die Längen sämtlicher zu ihr äquivalenten Figuren sich bei der Deformation nicht ändern, längenhomogen in bezug auf eine Figur, wenn sämtliche zu ihr äquivalenten dieselbe Länge haben. Länge heißt dabei: Gesamtlänge aller in der Figur vorkommenden Kurvenzüge. Verf. betrachtet u. a. in naheliegender Bezeichnung Dreiecksmaschen, 3 Arten von Vierecksmaschen (damit für die Problemstellung gleichwertig „Viereckskreuze“) und Sechsecksmaschen (gleichwertig „Sechseckskreuze“, „Sechsecksterne“). — Wird das Gewebe beschrieben durch  $x(u, v)$ , wobei die Gewebekurven durch  $u = \text{konst.}$ ,  $v = \text{konst.}$ ,  $w = -(u + v) = \text{konst.}$  dargestellt werden, das Linienelement durch  $dx^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$  und ist  $e = \sqrt{E}$ ,  $f = \sqrt{E - 2F + G}$ ,  $g = \sqrt{G}$ , so werden die Längen von Gewebekurven dargestellt durch  $\int e du$ ,  $\int g dv$ ,  $\int f du$ . Eine Deformation des Gewebes wird gekennzeichnet durch die Änderungen  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  von  $e$ ,  $f$ ,  $g$ . Dann gilt: I. Längentreu in bezug auf Dreiecksmaschen sind Deformationen mit  $\bar{e} = \varphi_u(u, v)$ ,  $\bar{f} = -\varphi_u(u, v) + \varphi_v(u, v)$ ,  $\bar{g} = -\varphi_v(u, v)$ ,  $\varphi$  beliebig. Diese Deformationen und nur sie sind im Sechseckgewebe „umwegstreu“. II. Längentreu in bezug auf Vierecksmaschen einer Art sind Deformationen mit  $\bar{e} = \bar{g} = \varphi(u + v) + \psi(u - v)$ ,  $\bar{f}$  beliebig, entsprechend für die anderen Arten. Längentreu in bezug auf Vierecksmaschen aller Arten sind nur die isometrischen Deformationen. III. Längentreu in bezug auf Sechsecksmaschen sind gewisse Deformationen, die von sechs beliebigen Funktionen einer Veränderlichen abhängen. — Für die entsprechenden längenhomogenen Gewebe werden die Funktionen  $e$ ,  $f$ ,  $g$  angegeben. Es wird gezeigt, daß sich ein längenhomogenes Gewebe stets durch längentreue Deformation auf eine Drehfläche legen läßt, im Falle der Homogenität der Dreiecks- oder Vierecksmaschen sogar als Drehgewebe in der Ebene dargestellt werden kann. Zum Schluß werden die Ergebnisse auf diskrete Gewebe („Dreiecksnetze“) erweitert, und so die bisher gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen beseitigt. *Bol.*

### Integralgeometrie, Konkaves und Verwandtes:

Fejes, L.: Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen. *Compositio Math.* 6, 456—467 (1939).

Einer geschlossenen konvexen Kurve  $C$  werde je ein  $n$ -Eck umbeschrieben und eingeschrieben. Sind  $T_n$ ,  $L_n$  bzw.  $t_n$ ,  $l_n$  Inhalt und Länge dieser Polygone, so kann man stets  $C$  in solche  $n$ -Eck-Ringe einbetten, für die eine der Ungleichungen gilt

$$\frac{T_n - t_n}{L_n^2} \leq \frac{1}{8n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}, \quad (1) \quad \frac{L_n - l_n}{L_n} \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \quad (2)$$

und

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} < \frac{3\sqrt{3}\pi}{n^2} \quad \left( \text{vermutlich sogar } \leq \sin^2 \frac{\pi}{n} \right), \quad (1')$$

$$\frac{L_n - l_n}{\sqrt{T_n}} < \frac{500}{n^2} \quad \left( \text{vermutlich sogar } \leq 4 \sqrt{n \cdot \tan \frac{\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2n}} \right). \quad (2')$$

Die Ungleichungen (1) und (2) sind scharf. Sind also  $T$ ,  $L$  Fläche und Länge von  $C$ , so kann man  $C$  stets in solche  $n$ -Eck-Ringe einbetten, für die

$$T_n - t_n < \frac{A \cdot T}{n^2}, \quad L_n - l_n < \frac{B \cdot L}{n^2}$$

mit universellen Konstanten  $A$ ,  $B$  gilt. Auch ein offener konvexer Kurvenbogen der Gesamtkrümmung  $\omega$  läßt sich in ein  $n$ -Eck-Band einbetten, das so zu wählen ist, daß die



Endpunkte des Bogens sowohl dem um- wie dem einbeschriebenen  $n$ -Eck angehören. Dann kann man eine Folge von Polygonbändern herstellen, deren Inhalt  $< (1 + \varepsilon_n) \frac{\omega L^2}{8n}$ , ( $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ) ist, und ebenso eine, deren Umfangsdifferenz  $L_n - l_n < (1 + \varepsilon_n) \frac{\omega^2 L}{8n^2}$  ( $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ) ist.

Harald Geppert (Gießen).

Sas, Ernst: Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen. *Compositio Math.* 6, 468—470 (1939).

In jede ebene geschlossene konvexe Kurve  $K$  mit dem Flächeninhalt  $F$  läßt sich ein  $n$ -Eck einbeschreiben, dessen Inhalt  $F_n \geq \frac{nF}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$  ist; außer im Falle der Ellipse läßt sich stets das  $>$ -Zeichen verwirklichen. Man erhält solche Polygone, wenn man um die größte Sehne  $s$  von  $K$  einen Kreis beschreibt und die Ecken eines ihm einbeschriebenen regulären  $n$ -Ecks senkrecht zu  $s$  auf  $K$  projiziert. Dies wird bewiesen.

Harald Geppert (Gießen).

Alexandroff, A. D.: Sur les théorèmes d'unicité pour les surfaces fermées. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 22, 99—102 (1939).

Verf. beweist zunächst den folgenden wichtigen Satz:  $f(u_1, u_2, u_3)$  sei eine für alle Werte der  $u_i$  definierte, analytische Funktion der  $u_i$ , die vom ersten Grade positiv homogen ist;  $d^2f$  sei niemals eine definite Form in den  $du_i$ , d. h. stets entweder indefinit oder identisch Null; dann ist  $f = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$  eine lineare Form. Ist nämlich  $n$  ein beliebiger Einheitsvektor und deutet man  $f(n)$  als Nullpunktsabstand einer zu  $n$  senkrechten Ebene  $E(n)$ , so hüllen die  $E(n)$  eine beschränkte Fläche  $F$  mit den Gleichungen  $x_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$  ein, die nirgends positiv gekrümmt ist und von ihren Stützebenen nur dort berührt wird, wo  $d^2f$  identisch verschwindet; mittels des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes zeigt man dann, daß  $d^2f$  überall verschwinden muß. Der Satz führt zu einem beachtenswerten Eindeutigkeitssatz über geschlossene Flächen.  $H$  sei eine geschlossene Fläche, deren sphärische Abbildung die Einheitskugel genau einmal überdeckt und die eine eindeutige, analytische Stützfunktion besitzt;  $R_1 \geq R_2$  seien ihre Hauptkrümmungsradien,  $n$  die zugehörige Flächennormale; schließlich sei  $f(R_1, R_2; n)$  eine für jedes feste  $n$  in  $R_1, R_2$  monotone nichtkonstante Funktion; kennt man dann die Werte von  $f$  auf  $H$  für alle Werte von  $n$ , so ist  $H$  dadurch bis auf eine Translation eindeutig bestimmt. Denn die Differenz der homogenen Stützfunktionen zweier zu gleichem  $f$  gehörigen Flächen  $H$  in Punkten mit gleichem  $n$  genügt den Forderungen des eingangs genannten Satzes, ist also linear. Dieser Eindeutigkeitssatz ist mit einem früheren des Verf. (dies. Zbl. 19, 81) zu vergleichen. Harald Geppert.

Varga, O.: Über die Integralinvarianten, die zu einer Kurve in der Hermiteschen Geometrie gehören. *Acta Litt. Sci. Szeged* 9, 88—102 (1939).

Ein Punkt  $\xi$  der komplexen projektiven Ebene ist bestimmt durch drei komplexe Verhältnißgrößen  $x_1 : x_2 : x_3$ ; als Normalkoordinaten werden die Größen  $x_i/(\xi\bar{\xi})$  mit  $(\xi\bar{\xi}) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3$  verwendet, so daß also  $(\xi\bar{\xi}) = 1$  für Normalkoordinaten gilt. Die elliptisch-Hermiteische Geometrie ist dann durch  $(\xi\bar{\xi}) = 0$  festgelegt. Für das Linienelement gilt  $\frac{1}{2} ds^2 = (d\xi d\bar{\xi}) - (\xi d\bar{\xi})(\bar{\xi} d\xi)$ . Eine Kurve  $\mathcal{C}$  ist durch  $\xi = \xi(u_1, u_2)$  gegeben, wobei  $\left\| \xi \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_2} \right\|$  vom Range 2 ist. Auf ihr läßt sich in der elliptisch-Hermiteischen Ebene unter gewissen Einschränkungen ein Geradenmaß definieren, das durch eine Integralinvariante  $\int k dG$  gegeben wird. Hierbei ist  $dG = 4(d\alpha_1 \bar{b})(d\alpha_2 \bar{b})(d\alpha_3 \bar{b})(d\alpha_4 \bar{b})$  eine alternierende vierfache Differentialform, die zu einer Geraden  $G$  gehört, wobei  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwei zueinander elliptisch-Hermitisch orthogonale Punkte von  $G$  und  $b$  der Pol von  $G$  sind. Bildet man  $\mathcal{C}$  auf eine reelle zweidimensionale Fläche  $F$  in  $R_4$  ab, so zeigt sich ein Zusammenhang von  $dG$  mit dem Riemannschen Flächenelement von  $F$ .

Weitzenböck (Laren).

**Väisälä, K.:** Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Ann. Acad. Sci. Fennicae A 51, Nr 6, 1—22 (1938).

$m$  sei der relative Mittelwert einer Funktion von  $n$  Punkten der Ebene in einem konvexen Gebiet  $G$ .  $G$  heißt Manimalgebiet (bzw. Minimalgebiet), wenn bei unendlich kleiner Variation von  $G$  stets  $dm < 0$  (bzw.  $> 0$ ) ist. Verf. beweist für Extremalgebiete Beziehungen zwischen  $m$  und den Mittelwerten für den Fall, daß einer der  $n$  Punkte auf dem Rand oder auf einem Bogen des Randes oder in einem bestimmten Randpunkt liegt, und wendet diese auf das Sylvestersche Vierpunktproblem an; Ergebnis: „Bei dem Vierpunktproblem ist das Maximalgebiet ein Polygon, während die Randkurve des Minimalgebietes keinen geradlinigen Teil besitzt.“ *Gericke.*

**Hedlund, Gustav A.:** Fuchsian groups and mixtures. Ann. of Math., II. s. 40, 370—383 (1939).

Verf. beweist, daß die geodätische Strömung für eine vollständige Fläche konstanter negativer Krümmung und endlicher Oberfläche zum Mischungstypus gehört. Der Beweis dieses Satzes gelingt Verf. durch Ausnutzung eines Zusammenhanges, der zwischen der geodätischen Strömung einerseits und der durch die längentreue Bewegung längs der Horozykeln erzeugten Strömung andererseits besteht. Die Horozykeln sind diejenigen euklidischen Kreise, welche den Grenzkreis der Fuchsschen Gruppe der Fläche von innen berühren. Mit seiner Hilfe folgt metrische Transitivität der einen Strömung aus der der anderen. Verf. benutzt die bekannte metrische Transitivität der geodätischen Strömung. Jener Zusammenhang reicht aber noch weiter. Durch Anwendung des Ergodensatzes auf die Horozykelströmung kann man die Mischungseigenschaft der geodätischen Strömung herleiten. Auch Ref. hatte letzteres vermutet und im Herbst 1938 beweisen können, allerdings in einem etwas abgeschwächten Sinne. Seine Arbeit wurde Ende 1938 der Preuß. Akad. d. Wiss. vorgelegt, ist aber noch nicht erschienen. Ref. benützt harmonische Funktionen. Der Beweis ist einfacher als der ursprüngliche Beweis, mit welchem Ref. den schwächeren Satz von der metrischen Transitivität begründet hatte. Verf. setzt neben der Endlichkeit der Oberfläche auch endlichen Zusammenhang voraus. Letzteres folgt indessen aus der ersten Voraussetzung. Man erkennt dies am raschesten, wenn man die Integralformel von Gauß-Bonnet auf das Fundamentalpolygon der Fuchsschen Gruppe anwendet.

*E. Hopf* (Leipzig).

**Hedlund, Gustav A.:** The dynamics of geodesic flows. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 241—260 (1939).

Klarer Überblick über die bis jetzt bewiesenen ergodentheoretischen Aussagen von der geodätischen Strömung im Linienelementraum  $\Omega$  einer vollständigen Fläche negativer Krümmung. Am weitesten ist man bei Flächen konstanter Krümmung vorgedrungen, wo als Haupthilfsmittel der Zusammenhang mit der Theorie der Fuchsschen Gruppen zur Verfügung stand. Die Klasse dieser Flächen ist so ausgedehnt, daß sie die mannigfaltigsten und interessantesten Beispiele für das ergodentheoretische Verhalten von Strömungen liefert. Je nach der Gruppe unterscheidet man zwischen Flächen erster und zweiter Art. Bei jeder Fläche erster Art ist die geodätische Strömung permanent transitiv (jeder offene Teil von  $\Omega$  verteilt sich im Laufe der Zeit überall dicht in  $\Omega$ ). Es gibt Flächen erster Art, bei welchen die Strömung transitiv, aber nicht metrisch transitiv ist (dies ist auch dem Ref. seit langem bekannt). Ist die Fläche geschlossen, allgemeiner von endlicher Oberfläche (sie ist dann notwendig von der ersten Art), so ist die Strömung sogar vom Mischungstypus (vgl. vorsteh. Ref. über die Originalarbeit des Verf.). Die Beweismethoden des Verf. beruhen auf einem vom Verf. entdeckten einfachen Zusammenhang zwischen der geodätischen Bewegung und der längentreuen Bewegung längs der Horozykeln. Im Gegensatz zu diesen Aussagen gilt bei Flächen zweiter Art: Fast alle Geodätischen von einem (beliebigen) Punkte verlaufen auf der Fläche ins Unendliche (vom Ref. für den Fall endlichen Zusammenhangs der Fläche, dann vom Verf. allgemein bewiesen). — Die Vermutung liegt nahe,



daß bei Flächen variabler negativer Krümmung gleiches gilt. Nach Morse besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen den Geodätischen einer solchen Fläche und den Geodätischen einer anderen, topologisch äquivalenten Fläche konstanter Krümmung. Ref. bemerkt, daß sich hieraus leicht eine eindeutige, stetige Abbildung der Linienelementräume beider Flächen aufeinander herleiten läßt, bei welcher Geodätische in Geodätische übergehen. Alle rein topologischen Aussagen im Falle konstanter Krümmung gelten damit allgemein (Theoreme 4.2 und 4.5). Zur Übertragung metrischer Aussagen braucht man mehr als bloße Stetigkeit der Abbildung. Verf. hat mit seinen Methoden beweisen können, daß auf einer geschlossenen Fläche negativer Krümmung fast alle Geodätischen quasiergodisch (transitiv) sind. Der Beweis der Mischungseigenschaft, sogar der der metrischen Transitivität, steht noch aus. Eine vom Verf. veranlaßte Dissertation (A. Tuller) enthält einige Verallgemeinerungen auf dreidimensionale Räume konstanter negativer Krümmung. Metrische Transitivität und Mischung sind noch nicht bewiesen. Eine Bemerkung des Ref. hierüber, die Verf. zitiert, enthält eine Lücke, die Ref. noch nicht ausfüllen konnte. *E. Hopf* (Leipzig).

### **Allgemeine metrische Geometrie, Mengentheoretische Geometrie:**

Alexits, Georges de: Sur la structure des courbes régulières. C. R. Soc. Sci. Varsovie **31**, 104—107 (1938).

Der Verf. beweist folgende einfachen Sätze: 1. Ist  $K$  eine reguläre Kurve (im Sinne von K. Menger) und  $E$  ein in  $K$  enthaltenes  $G_\delta$  positiver Dimension, so enthält  $E$  einen einfachen Bogen. 2. Die Menge der Endpunkte einer regulären Kurve  $K$  bleibt auch nach Vereinigung mit einer beliebigen 0-dimensionalen Untermenge von  $K$  0-dimensional. 3. Die Menge der Punkte eines Peanoschen Kontinuums, welche regulär sind und dabei das Kontinuum nicht lokal zerschneiden, ist höchstens 0-dimensional. 4. Eine neue charakteristische Eigenschaft der Baumkurven wird gegeben.

*K. Zarankiewicz* (Warszawa).

Beer, Gustav: Beweis des Satzes, daß jede im kleinen zusammenhängende Kurve konvex metrisiert werden kann. Fundam. Math. **31**, 281—320 (1938).

In dieser Arbeit wird die Mengersche Vermutung betr. die topologische Identität zwischen den im kleinen zusammenhängenden Kontinua und den metrisch konvexen Kontinua (dies. Zbl. **20**, 76) für den Fall der Kurven (d. h. eindimensionale Kontinua) bestätigt. Die im kleinen zusammenhängende Kurve  $K$  ist als Grundraum betrachtet;  $r(a, b)$  bezeichnet die Entfernung zweier Punkte  $a$  und  $b$ ; der Verf. führt folgende Bezeichnungen und Definitionen ein: Für Mengen  $A$  und  $B$ ,  $\bar{A}$  = abgeschlossene Hülle von  $A$ ,  $d(A)$  = Durchmesser von  $A$ ,  $B(A)$  = Begrenzung von  $A$ ,  $A \cdot B$  = Durchschnitt von  $A$  und  $B$ . Unter einem Normalstück versteht er die abgeschlossene Hülle einer nicht leeren zusammenhängenden offenen Menge mit höchstens nulldimensionaler Begrenzung. Eine halbnormale Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  eines Normalstückes  $S$  definiert er als ein System von endlich oder abzählbar unendlich vielen Normalstücken  $S_1, S_2, \dots$ , welche die folgenden vier Forderungen erfüllt: 1.  $S = \sum_i S_i$ . 2. Zwei verschiedene Stücke  $S_i$  und  $S_j$  haben miteinander höchstens Begrenzungspunkte gemein. 3.  $\overline{\sum_i B(S_i)}$  ist höchstens

nulldimensional. 4.  $B(S) \cdot \text{Limsup } S_i$  ist leer; er nennt diejenigen Stücke von  $\mathfrak{Z}$ , welche mit  $B(S)$  Punkte gemein haben, Randstücke von  $\mathfrak{Z}$ , und die anderen Stücke, innere Stücke von  $\mathfrak{Z}$ ; die abgeschlossene Hülle der Vereinigung aller inneren Stücke heißt das Zentrum von  $\mathfrak{Z}$  und ist mit  $Z(\mathfrak{Z})$  bezeichnet; er setzt  $\overline{\sum_i B(S_i)} = B(\mathfrak{Z})$ ; numeriert man die Stücke von  $\mathfrak{Z}$  derart,

daß zuerst die (wegen Forderung 4) endlich vielen Randstücke kommen, so heißt  $\mathfrak{Z}$  normal angeordnet. Wenn das Zentrum einer halbnormalen Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  zusammenhängend ist und mit jedem Randstück einen nicht leeren Durchschnitt hat, so nennt Verf.  $\mathfrak{Z}$  eine normale Zerlegung von  $S$ , und, wenn außerdem alle Stücke einen kleineren Durchmesser als  $\varepsilon$  haben, eine normale  $\varepsilon$ -Zerlegung; unter Randbreite einer normalen Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  versteht er die stets positive Entfernung zwischen der Begrenzung von  $S$  und dem Zentrum von  $\mathfrak{Z}$ . Verf. beweist zahlreiche Sätze betr. halbnormale und normale Zerlegungen eines Normalstückes; dann geht er folgendermaßen an die Konstruktion einer konvexen Metrik in  $K$ : Es sei  $\mathfrak{Z} = (S_1, S_2, \dots)$  eine normale  $1/2$ -Zerlegung von  $K$ ; er zerlegt  $B_1 = B(\mathfrak{Z})$  in  $m_1 \geq 2$  nicht leere, abgeschlossene und paarweise fremde Mengen  $B'_1$ , mit einem Durchmesser  $< 1/2$ ; die  $S_i$  heißen Stücke erster Stufe, die  $B'_1$  Begrenzungsteile erster Stufe, die (endlich vielen)  $S'_i$ , die mit zwei verschiedenen  $B'_1$  einen nicht leeren Durchschnitt haben, Brückenstücke erster Stufe; mit  $\delta_1$  bezeichnet er die

kleinste Entfernung zweier verschiedener  $B_i^k$ ; es sei nun  $\beta_i = (S_{i,1}, S_{i,2}, \dots)$  eine normale  $\delta_1/2$ -Zerlegung von  $S_i$ ; er bezeichnet mit  $\beta_1$  die kleinste Randbreite der mit den Brückenstücken erster Stufe vorgenommenen Zerlegungen  $\beta_i$ ; er zerlegt  $B_2 = \sum_{i_1, i_2} B(S_{i_1, i_2}) = \sum_i B(\beta_i)$  in  $m_2$  nicht leere, abgeschlossene und paarweise fremde Mengen  $B_2^k$  mit einem Durchmesser  $< \inf. (\delta_1/4, \beta_1)$ ; die  $S_{i_1, i_2}$  heißen Stücke zweiter Stufe, die  $B_2^k$  Begrenzungsstücke zweiter Stufe, die (endlich vielen)  $S_{i_1, i_2}$ , die mit zwei verschiedenen  $B_2^k$  einen nicht leeren Durchschnitt haben, Brückenstücke zweiter Stufe. Angenommen, es seien die Stücke  $S_{i_1, \dots, i_{n-1}}$  Begrenzungsstücke und Brückenstücke  $(n-1)$ -ter Stufe und die positive Zahl  $\delta_{n-1}$  schon definiert, so gelangt er zu denselben Elementen  $n$ -ter Stufe wie folgt: Er unterwirft jedes  $S_{i_1, \dots, i_{n-1}}$  einer normalen Zerlegung  $\beta_{i_1, \dots, i_{n-1}} = (S_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1}, S_{i_1, \dots, i_{n-1}, 2}, \dots)$  und setzt  $B_n = \sum_{i_1, \dots, i_n} B(S_{i_1, \dots, i_n})$ ,  $\beta_{n-1} =$  kleinste Randbreite der mit den Brückenstücken  $(n-1)$ -ter Stufe vorgenommenen Zerlegungen,  $B_n = B_n^1 + \dots + B_n^{m_n}$ , wobei die Mengen  $B_n^1, \dots, B_n^{m_n}$  nicht leer, abgeschlossen und paarweise fremd sein mögen, mit einem Durchmesser  $< \inf(\delta_{n-1}/4, \beta_{n-1})$ . Dann ordnet er jedem Stück  $S_{i_1, \dots, i_n}$  eine positive Zahl  $g(S_{i_1, \dots, i_n})$  auf Grund folgender rekursiven Definition zu: 1. Für Stücke erster Stufe  $g(S_i) = 1/2$ . 2. Für ein Randstück  $n$ -ter Stufe (d. h. von einer  $\beta_{i_1, \dots, i_{n-1}}$   $S_{i_1, \dots, i_n}$  ( $n \geq 2$ ) sei  $g(S_{i_1, \dots, i_n}) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cdot g(S_{i_1, \dots, i_{n-1}})$ . 3. Für ein inneres Stück  $n$ -ter Stufe  $S_{i_1, \dots, i_n}$  ( $n \geq 2$ ) sei  $g(S_{i_1, \dots, i_n}) = \frac{1}{n^2 \cdot 2^{v_{i_1, \dots, i_{n-1}}}} \cdot g(S_{i_1, \dots, i_{n-1}})$ , wo  $v_{i_1, \dots, i_{n-1}}$  = Zahl der Randstücke von  $\beta_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ , deren Anordnung normal vorausgesetzt ist. Es gilt  $g(S_{i_1, \dots, i_n}) \leq 1/2^n$ . Bezeichnet  $O_{i_1, \dots, i_n}$  den offenen Kern von  $S_{i_1, \dots, i_n}$ , so nennt der Verf. für irgendeine Menge  $M$  die Zahl  $G_n(M) = \sum g(S_{i_1, \dots, i_n})$  das  $n$ -stufige Gewicht  $M \cdot O_{i_1, \dots, i_n}$  nicht leer von  $M$  (evtl. null oder unendlich); schließlich definiert Verf.  $\varrho_n(a, b)$  für zwei beliebige Punkte  $a$  und  $b$  aus  $K$  als die untere Grenze der  $n$ -stufigen Gewichte aller die Punkte  $a$  und  $b$  enthaltenden zusammenhängenden Mengen, und  $\varrho(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(a, b)$ . Er beweist, daß die Metrik  $\varrho$  die Fréchet'schen Entfernungsaxiome erfüllt, daß sie mit der gegebenen Metrik  $r$  topologisch äquivalent ist, und zum Schlusse, daß sie konvex ist; so ist der angekündigte Satz begründet.

Chr. Pauc (Paris).

**Pauc, Christian:** Contribution au problème de M. Fréchet relatif à la recherche d'une paramétrisation dérivable pour les courbes douées d'une tangente en tout point. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 1154—1157 (1938).

Bezeichne  $p(t)$  eine in  $[a, b]$  stetige Funktion und  $C: p[a, b]$  die stetige Kurve  $C$ , deren Punkte durch die Parameterdarstellung  $p = p(t)$  definiert sind. Ist  $p(t)$  in keinem Teilintervall von  $[a, b]$  konstant, so heiße  $C: p[a, b]$  eine normale Darstellung von  $C$ . Man bezeichne mit  $\varrho(p(t'), p(t''))$  den Radius des kleinsten um  $p(t')$  geschlagenen Kreises, welcher den Teilbogen  $C: p[t', t'']$  enthält, und setze  $\chi(p(t'), p(t'')) = \varrho(p(t'), p(t''))$  dividiert durch den Abstand von  $p(t')$  und  $p(t'')$ , wenn  $p(t') \neq p(t'')$ , bzw.  $\chi(p(t'), p(t'')) = \infty$ , wenn  $p(t') = p(t'')$ . Sei endlich

$$\chi_r(t) = \lim_{t' \rightarrow t+0} \chi(p(t), p(t')), \quad \chi_l(t) = \lim_{t'' \rightarrow t-0} \chi(p(t), p(t'')).$$

Betreffs des Fréchet'schen Darstellungsproblems (Fundam. Math. 26, 334) erzielt Verf. über die Wardschen Resultate hinaus (dies. Zbl. 17, 347) folgende Sätze: Hat  $C$  im Punkte  $p$  eine Tangente, so ist, damit  $C$  eine normale Darstellung  $C: p[a, b]$  mit  $p = p(t_0)$  und  $p'(t_0) \neq \text{Nullvektor}$  besitze, notwendig und hinreichend, daß 1. die Tangente keine Rückkehrtangente sei, 2.  $\chi_r(t_0) = \chi_l(t_0)$ , wenn  $a < t_0 < b$ , bzw.  $\chi_r(a) = 1, \chi_l(b) = 1$ , wenn  $t_0 = a$  oder  $= b$ . — Ist  $C$  eine in der Parameterdarstellung  $\lambda[0, s(C)]$  gegebene rektifizierbare Kurve ( $s$  = Bogenlänge von  $C$ ), so gilt  $\chi_r(s) = \chi_l(s) = 1$  für fast alle  $s$ . Verf. konstruiert dann eine rektifizierbare Parameterkurve, die überall eine Tangente hat und dennoch in einer nicht abzählbaren Menge  $\chi_r > 1$  ist. — Ist  $C$  eine Kurve im  $n$ -dimensionalen  $R_n$ , deren Kontingente eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ausläßt, so ist bei jeder normalen Darstellung  $C: p[a, b]$  von  $C$  fast überall  $p'(t) \neq \text{Nullvektor}$ .

G. Alexits (Budapest).

**Hall, D. W., and A. D. Wallace:** Some invariants under monotone transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 294—295 (1939).

Die Verff. betrachten eine unbestimmte Eigenschaft  $P$  einer Punktmenge. Sie



definieren vier spezielle Eigenschaften  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  eines Peanoschen Kontinuums  $S$ , welche mittels der Eigenschaft  $P$  definiert werden. Wenn man als monotone Transformation  $T(S) = S'$  diejenige eindeutige und stetige Transformation bezeichnet, bei welcher das Urbild jedes Punktes von  $S'$  zusammenhängend ist, so gilt der Satz: Ist die Eigenschaft  $P$  invariant in bezug auf die monotone Transformation  $T(S)$ , so ist auch jede von den vier definierten Eigenschaften  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  invariant. Als Anwendung wird der bekannte Satz zitiert: Die Eigenschaft, daß ein Peanosches Kontinuum eine Baumkurve, eine reguläre Kurve, eine rationale Kurve ist, ist invariant gegenüber den monotonen Transformationen. K. Zarankiewicz (Warszawa).

**Delvendahl, Otto:** Ein Satz über die Verzweigungspunkte der Kontinuen von beschränkter Ordnung und sein dualer Fall. Deutsche Math. 4, 25—31 (1939).

Es sei  $K$  ein Kontinuum im projektiven  $R_n$  von der Ordnung  $k = O(K) \geq n$ , wobei  $O(K)$  erklärt ist als maximale Mächtigkeit des Durchschnittes von  $K$  mit den  $(n-1)$ -dimensionalen Ebenen (des  $R_n$ ). Ein Punkt  $P$  von  $K$  werde als von der Verzweigungsordnung  $z = z(P)$  bezeichnet, wenn von  $P$  nicht weniger als  $(2z-1)$  und nicht mehr als  $2z$  einfache Teilbogen von  $K$  ausgehen. Bewiesen wird: Die Summe der Verzweigungsordnungen von  $n$  (beliebigen) Punkten von  $K$  ist höchstens gleich  $O(K)$ . Für  $(K) < 2n$  ergibt sich daraus  $2(k-n) + 1 + Z$  als obere Schranke für die Mindestanzahl einfacher, bis auf Endpunkte fremder Bogen, als deren Summe  $K$  darstellbar ist; dabei wird unter  $Z$  die Anzahl der Verzweigungspunkte  $V$  von  $K$  mit  $z(V) > 1$  verstanden. Ferner wird der duale Satz bewiesen; dabei werden Kontinua  $K'$  von  $(n-1)$ -dimensionalen Ebenen  $E$  des  $R_n$  betrachtet, die Klasse von  $K'$  wird wie üblich definiert sowie eine Ebene  $E$  von  $K'$  als von der Verzweigungsklasse  $z'$  bezeichnet, wenn  $E$  zu mindestens  $(2z'-1)$  und zu höchstens  $2z'$  auf  $K'$  gelegenen einfachen Bogen Berührungselement in einem Endpunkte ist. Haupt (Erlangen).

**Alexits, Georges:** La torsion des espaces distanciés. Compositio Math. 6, 471—477 (1939).

L'auteur introduit pour quatre points  $p, q, r_1, r_2$  d'un espace distancié  $E$  tels que ni  $p, r_1, r_2$  ni  $q, r_1, r_2$  ne soient alignés, un nombre  $\tau(p, q; r_1, r_2)$  fonction des distances mutuelles de ces points qui, lorsque  $E$  est l'espace euclidien  $E_3$ , représente:  $3 \sin$  (angle du plan  $pr_1r_2$  avec le plan  $qr_1r_2$ )/distance de  $p$  à  $q$ ; il définit la torsion métrique de  $E$  en un point d'accumulation  $p_0$  comme  $= \lim_{q \rightarrow p_0} \left( \lim_{r_1 \rightarrow p_0, r_2 \rightarrow p_0} \tau(p, q; r_1, r_2) \right)$  et montre que pour un arc  $C$  de  $E_3$  représenté au moyen de l'abscisse curviligne  $\sigma$  par  $p = p(\sigma)$ , la fonction  $p$  admettant en  $\sigma_0$  des dérivées des trois premiers ordres, la torsion métrique de  $C$  en  $p_0 = p(\sigma_0)$  existe et  $=$  |torsion classique de l'arc orienté en  $p_0$ |. Il donne un exemple d'un arc d'un espace distancié qui a en chacun de ses points une torsion métrique nulle sans être cependant plongeable dans le plan et il établit qu'en définissant la torsion métrique de  $E$  en  $p_0$  comme  $= \lim \tau(p, q; r_1, r_2)$ ,  $p, q, r_1, r_2$  convergeant simultanément vers  $p_0$ , la condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc euclidien soit plan, est que cette torsion existe en chaque point de l'arc et soit nulle. Chr. Pauc.

**Linsman, M.:** Sur certaines involutions topologiques. II. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 781—790 (1938).

In Fortsetzung der ersten Note gleichen Titels (dies. Zbl. 20, 74) wird gezeigt: Eine Involution vom Range 2 und von der Ordnung 3 besitzt höchstens drei Punkte 3. Ordnung, darunter, wenn ein neutrales System existiert, höchstens einen regulären, d. h. einen solchen, der nicht dem neutralen System angehört. Ist ein neutrales System vorhanden und fallen dessen beide Punkte in einen zusammen, so ist dieser ein Punkt 3. Ordnung (und es gibt keine Punkte 2. Art). Der betr. Bogen  $\mathfrak{B}$  ist darstellbar als Summe von nicht mehr als vier Bogen 2. Ordnung. Ist  $\mathfrak{B}$  geschlossen (d. h. topologisches Kreisbild), so ist stets mindestens ein regulärer Punkt 3. Ordnung vorhanden, und zwar genau ein solcher dann und nur dann, wenn ein neutrales System existiert. Eine Involution, welche auf der Summe zweier geschlossener  $\mathfrak{B}$  definiert, vom Range 2

und von der Ordnung 3 ist, definiert auf den Summanden je eine Involution bzw. von den Ordnungen 3 und 2. — Beispiele aus der algebraischen Geometrie. *Haupt.*

### **Topologie:**

**Sadowsky, Michael:** A tetrahedral Riemann surface model of a closed finite locally-Euclidian two-space. Amer. Math. Monthly 46, 199—202 (1939).

Außer dem Drehzylinder hat die euklidische Ebene bekanntlich noch eine zweite Raumform, aus dem elliptischen Raume: die Cliffordsche Fläche, wenn man von jenen Modellen absieht, die isotopisch und um so mehr homotopisch mit Stigmata behaftet ist. Will man aber nur die homotopinvarianten Stigmata vermeiden, dann kann man für diese zweite Raumform endliche Modelle direkt in dem euklidischen Raum konstruieren. Ein solches Modell besteht aus einem zweimal überlagerten Tetraeder mit einer Bewegungsgruppe  $G_4$  in sich und zwei Kreuzungslinien längs zwei gegenüberliegender Kanten. Der Fundamentalbereich bei Entwicklung dieser Raumform auf der euklidischen Ebene erweist sich natürlich als ein Parallelogramm. Die Umkehrung ist nur richtig, solange die Halbierung des Parallelogramms ein Dreieck mit lauter spitzen Winkeln ergibt. — Verf. zeigt durch Betrachtungen über die Modulteilung der Halbebene, daß es in dem zugehörigen Gitter des Parallelogramms  $(\omega, \omega')$  äquivalente Exemplare gibt (nämlich 3), die bei passender Faltung zu einem (einzigen) zweimal überlagerten Tetraeder Anlaß geben. Eine Ausnahme bildet der Fall des Rechtecks, bei dem das Tetraeder flach wird. *D. Barbilian (Bucureşti).*

**White, H. S.:** The convex cells formed by seven planes. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 147—153 (1939).

6 Ebenen allgemeiner Lage im reellen projektiven 3-dimensionalen Raum teilen den Raum in 26 konvexe Polyeder. Der Typus dieser Raumteilung, das Schema der Inzidenzen im Sinne der Morphologie der Polyeder, ist stets derselbe. Das gilt nicht mehr von der von 7 Ebenen allgemeiner Lage gebildeten Raumteilung, welche aus 42 konvexen Polyedern besteht. In der vorliegenden Note werden die sämtlichen möglichen Typen bei 7 Ebenen aufgestellt und durch Diagramme gekennzeichnet. Es zeigt sich, daß es 11 Typen gibt. Die mühsamen Disjunktionsbeweise, insbesondere der Vollständigkeitsnachweis, sind nur skizziert. *Wolfgang Franz (Gießen).*

**Iyanaga, Shôkichi:** Ein Beweis der Invarianz der Bettischen Gruppen bei Unterteilung der Komplexe. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 1—3 (1939).

Einfacher Beweis auf Grund eines allgemeinen linearen, mit der Randbildung vertauschbaren Operators in einem Euklidischen Komplex, im Anschluß an Alexandroff-Hopf, Topologie. Berlin 1935. *Wolfgang Franz (Gießen).*

**Alexander, J. W.:** On the connectivity ring of a lattice. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 208—209 (1939).

Verf. schildert kurz die Möglichkeit einer allgemeineren Theorie topologischer Räume, welche den Punktbegriff nicht voraussetzt, sondern nur einen Mengenring (lattice) bzw. ein System von Elementen für die Vereinigung und Durchschnitt erklärt ist.

*Kurt Reidemeister (Marburg a. d. L.).*

**Komatu, Atuo:** Über die Überdeckungen von Zellenräumen. II. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 4—7 (1939).

Bei randtreuer Abbildung eines Komplexes  $D_1$  in einen Komplex  $D_2$  wird die Homologiegruppe einer Überdeckung  $U_1$  von  $D_1$  in eine Homologiegruppe einer gewissen Überdeckung  $U_2$  von  $D_2$  abgebildet. Ein baryzentrisch unterteilter Komplex hat dieselben Überdeckungshomologieeigenschaften wie der ursprüngliche, wenn die Zellen desselben die Homologieeigenschaften von Simplices haben (I. vgl. dies. Zbl. 20, 79).

*K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).*

**Vietoris, L.:** Über  $m$ -gliedrige Verschlingungen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 49, Abt. 1, 1—9 (1939).

Die bekannte Theorie der Verschlingungszahlen wird nach zwei Richtungen verallgemeinert. Einerseits werden nicht nur Verschlingungszahlen, sondern auch  $d$ -dimensionale



Verschlingungszyklen erklärt, die im Falle  $d = 0$  auf die gewöhnlichen Verschlingungszahlen zurückführen, andererseits werden Verschlingungen von mehr als 2 Zyklen eingeführt. Die Methode entspricht genau der gewöhnlichen Theorie. Sind  $C_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) berandende Zyklen der Dimension  $d_i$  einer orientierten  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, welche nicht sämtlich einen Punkt gemeinsam haben, und berandet etwa  $C_m$  die Kette  $K_m$ , so wird der Verschlingungszyklus  $Z(C_1, \dots, C_m)$  erklärt als der Schnitzzylus  $C_1 \times C_2 \times \dots \times K_m$ . Er hat die Dimension  $d = \sum d_i + 1 - (m - 1)n$  und bestimmt seine Homologiekategorie eindeutig. Die Verschlingungszyklen genügen den naturgemäßen Verallgemeinerungen der für gewöhnliche Verschlingungszahlen üblichen Gesetze. Sie sind assoziativ, z. B. gilt  $Z(C_1 \times C_2, C_3, C_4, \dots, C_m) = Z(C_1, \dots, C_m)$ , sie sind kommutativ bis auf ein gewisses von den Dimensionen abhängiges Vorzeichen, sie sind in bezug auf die Kettenaddition distributiv. Ferner gilt ein „Satz vom Ausschnitt“  $Z(C_1, \dots, C_m) = Z(C_1 \times C_2, C_1 \times C_3, \dots, C_1 \times C_m)$ , wo  $C_1$  einer Mannigfaltigkeit entspricht und die Verschlingung in  $C_1$  zu verstehen ist. Im Spezialfall  $d = 0$  reduziert sich die Homologiekategorie des Verschlingungszyklus wesentlich auf eine natürliche Zahl, die Verschlingungszahl. Ein Spezialfall ist die Kroneckersche Charakteristik eines Systems von  $m$  Funktionen von  $m + 1$  Variablen. Ist außerdem  $m = 2$ , so entstehen die gewöhnlichen Verschlingungszahlen. — Der Begriff des Verschlingungszyklus und die abgeleiteten Gesetze werden durch Beispiele und Anwendungen erläutert. Ein einfaches Beispiel einer Verschlingungszahl  $\pm 1$  von 3 Zyklen erhält man durch 3 Großkreise auf einer Kugel. Eine einfache Anwendung ist etwa der Satz: Zu 4 im 3-dimensionalen Raum verschlungenen Kugeln gibt es genau eine Kugel  $K$ , die von ihnen in 4 Großkreisen von  $K$  geschnitten wird.

Wolfgang Franz (Gießen).

**Freudenthal, Hans: Neue Erweiterungs- und Überführungssätze.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 139—140 (1939).

In gedrängter Ankündigung wird das Erweiterungs- und Überführungsproblem einer Abbildung  $f(Q) \subset S^d$  ( $d$  dimensionale Sphäre) behandelt, wobei  $Q$  Teilpolyeder eines Polyeders  $P$  ist, dessen höchstens  $r$ -dimensionale Simplexe das Polyeder  $P$  bilden: Wann ist  $f(Q)$  fortsetzbar auf  $P^r$ , wann sind zwei solche Abbildungen ineinander überführbar? Es wird die vollständige Lösung des Erweiterungsproblems für  $r \leq 2d$  und des Überführungsproblems für  $r < 2d$  im Sinn einer Reduktion auf die Kenntnis der Gruppen  $(d^p)$ , wo  $p < 2d$  ist, in Aussicht gestellt. Dabei ist  $(d^p)$  die  $p$ -te Homotopiegruppe der  $S^d$ . — Der Weg zu diesem Erfolg führt über folgende bemerkenswerte Sätze: 1. Ist  $f(Q)$  fortsetzbar auf  $P^{r-1}$ , so gibt es zu  $f$  einen  $r$ -dimensionalen oberen Zyklus mit Koeffizienten aus  $(d^{r-1})$ , der kohomolog null ist dann und nur dann, wenn die Abbildung auch auf  $P^r$  fortsetzbar ist. Diesen Satz hat gleichzeitig S. Eilenberg für allgemeinere Räume als die  $S^d$  gefunden (dies. Zbl. 20, 263). Eine zu diesem ob. Zyklus analoge  $r - 1$ -dimensionale Kette erhält man im Fall  $P^{r-1} \subset Q$ , wenn  $f(P^{r-2})$  sich in einen Punkt abbildet, weil dann zu jedem  $r - 1$ -Simplex ein Element von  $(d^{r-1})$  als Koeffizient gegeben werden kann. Dann und nur dann, wenn diese Kette ein oberer Zyklus ist, ist  $f(Q)$  auf  $P^r$  fortsetzbar. 3. Ist  $P^{r-1} = Q$ ,  $f(P^{r-2})$  ein Punkt und  $f(Q)$  fortsetzbar auf  $P^r$ , so ist (und hier liegt ein großer Teil der Beweismühe)  $f(Q)$  bei beliebiger Fortsetzung bis auf  $P^{2r-1}$  fortsetzbar. — Hervorgehoben wird noch ein Satz über die Borsuksche Gruppe der Abbildungen  $f(P^{2d-2}) \subset S^d$ : Sie besitzt eine absteigende Folge von Untergruppen  $G^q$ , deren Faktorgruppen  $G^q/G^{q-1}$  isomorph sind den oberen Bettigruppen der Dim.  $q$  mit Koeffizientenbereichen  $(d^q)$ . R. Furch.

**Kaufmann, B.: Limit groups and spaces in regions and open manifolds.** Compositio Math. 6, 434—455 (1939).

Let  $G$  be a region in the  $n$ -dim. Euclidean space and  $\Gamma$  its boundary. The author defines the "boundary divisors" or "ends" in  $G$  essentially as decreasing sequences of part regions tending to the boundary  $\Gamma$  and represented by their limit sets. With the aid of the notion of divisor are defined the limit groups of  $G$  which are groups of 0-dim. infinite cycles tending to  $\Gamma$ . The author considers nearly the group  $\Sigma$  of pure cycles which is the direct sum of the groups of "convergent" (or  $\alpha$ ) and "divergent" (or  $\beta$ ) cycles. The former are limit cycles lying on finite systems of paths in  $G$  with accessible endpoints on the boundary, the latter are cycles of opposite type. Similarly are defined two different types of boundary relations, the  $\alpha$ - and  $\beta$ -homologies. The author shows that the group  $\Sigma$  can be considered as an abstract space  $\Sigma^*$  while he

defines closures of this group by means of local homologies. The space  $\Sigma^*$  is a neighbourhood space and satisfies all axioms of a topological space, except the distributive law of closures. With the aid of  $\alpha$ - and  $\beta$ -homology groups the author defines the prime ends in the space of all  $\alpha$ - and  $\beta$ -limit sequences of points, this space being a subspace of  $\Sigma^*$ . This definition is essentially on the lines of the previous papers of the author (this Zbl. 4, 74). *Z. Waraszkiewicz* (Warsaw).

**Jones, F. Burton:** Certain equivalences and subsets of a plane. *Duke math. J.* 5, 133—145 (1939).

Wie in seiner Arbeit „Concerning R. L. Moore's Axiom 5“, dies. Zbl. 19, 371, geht Verf. von Räumen aus, die Moore's Axiomen 0—4 genügen (Foundations of point set theory; dies. Zbl. 5, 54) und stellt progressiv 6 Eigenschaften auf, deren jede (in den genannten Räumen) aus der nachfolgenden als Satz entspringt, aber nicht umgekehrt diese nachfolgende in sich enthält. Eigenschaft 6 ist Moores Axiom 5. — Als Axiom 5 wird eingeführt: „Liegt der Punkt  $A$  in Umgebung  $R$  und ist der Punkt  $B$  verschieden von  $A$ , so gibt es in  $R$  eine abgeschlossene, kompakte Menge  $T$ , welche  $A$  und  $B$  trennt.“ Eine gewisse Teilmenge der Ebene zeigt, daß 0—4 und 5 weder 5 noch sonst eine der 6 Eigenschaften nach sich ziehen. Diese 6 Eigenschaften werden aber nach Zufügung von 5 unter sich äquivalent. — Es folgt eine Untersuchung der Rolle von 5 und der 6 Eigenschaften im Hinblick auf die Eigenschaften „metrisch“ und „lokal trennbar“ (Whyburn, vgl. dies. Zbl. 1, 228). Die Eigenschaft, eine Teilmenge der Ebene oder 2-Sphäre zu sein, wird dabei mit untersucht; dabei spielt das Axiom  $5_1^*$  aus der früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 17, 135) herein.

*R. Furch* (Rostock).

**Smith, Adam J.:** On upper semi-continuous decompositions of curves and manifolds. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* 31, 114—138 (1938).

Verf. beweist einige Sätze über die halbstetigen Zerlegungen (im Sinne von R. L. Moore) der lokalzusammenhängenden Kontinua in Kontinua, die nicht das Ganze zerlegen. Als Anwendung erhält man eine neue charakteristische Eigenschaft der einfachen geschlossenen Kurve (ohne Doppelpunkte). *K. Zarankiewicz* (Warszawa).

**Cohen, L. W.:** On imbedding a space in a complete space. *Duke math. J.* 5, 174—183 (1939).

Verf. verallgemeinert den für metrische Räume bekannten Begriff der Vollständigkeit auf Umgebungsräume. Zu diesem Zweck sei  $A$  eine Menge von Elementen  $\alpha$  (Indizes genannt) und  $R$  ein Raum, in welchem jedem Punkte  $p \in R$  für jedes  $\alpha \in A$  eine wohldefinierte Menge  $U_\alpha(p) \subset R$  als Umgebung zugeordnet ist. Eine Punktfolge  $\{p_n\}$  aus  $R$  heißt eine Cauchysche Folge, wenn es zu jedem  $\alpha \in A$  ein  $q_\alpha \in R$  und ein  $n_\alpha > 0$  gibt, so daß  $p_n \in U_\alpha(q_\alpha)$  für alle  $n \geq n_\alpha$  besteht. Hat jede Cauchysche Folge aus  $R$  einen Häufungspunkt, so nennt Verf.  $R$  einen vollständigen Raum. Verf. unterwirft die Umgebungen von  $R$  außer den Hausdorffschen Axiomen auch dem folgenden Axiom: Zu jedem  $p \in R$  und  $\alpha \in A$  gibt es ein  $\lambda(\alpha)$ ,  $\delta(p, \alpha) \in A$ , so daß für jedes  $q \in R$ , für welches  $U_{\delta(p, \alpha)}(q) \cdot U_{\lambda(\alpha)}(p) \neq \emptyset$  ist,  $U_{\delta(p, \alpha)}(q) \subset U_\alpha(p)$  bestehe. Für einen derartigen Raum gilt folgende Verallgemeinerung eines bekannten Hausdorffschen Satzes: Zu  $R$  läßt sich ein vollständiger Raum  $R^*$  bestimmen derart, daß  $R$  mit einer dichten Teilmenge von  $R^*$  homöomorph sei. *G. Alexits* (Budapest).

**Kline, Morris:** Representation of homeomorphisms in Hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc.* 45, 138—140 (1939).

A. Tychonoff [*Math. Ann.* 102, 544—561 (1929)] bewies, daß jeder normale topologische Raum  $S$  mit einem Umgebungssystem von einer Mächtigkeit  $\leq \tau$  in einen Cartesischen Raum  $R_\tau$  eingebettet werden kann. Dieses Verfahren wird so verfeinert, daß dabei ein Homöomorphismus  $g$  von  $S$  auf sich in eine lineare Transformation der Form (1)  $y_\alpha = x_\beta$  übergeht ( $x_\gamma$  bzw.  $y_\gamma$  die  $\gamma$ -te Koordinate von  $x$  bzw. des Bildpunktes  $y$  von  $x$ ). Ist  $\tau = \aleph_0$ , so kann  $S$  weiter in das Fundamentalparallelo-top des Hilbertschen Raumes abgebildet werden, so daß  $g$  die Form (1) behält. *Köthe*.



## Mathematische Physik.

### Optik:

**Lecornu, Léon:** Sur la propagation des ondes sphériques. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1185—1188 (1939).

Verf. beschäftigt sich mit den einfachsten, zeitlich periodischen longitudinalen und transversalen Kugelwellen in einem elastischen Medium, die seit langem wohl-known sind (vgl. Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität. Leipzig u. Berlin 1907 S. 355). Dadurch aber, daß er die Lösung der Diff. Gl.  $F''(R) + 4F'(R)/R + k^2F(R) = 0$ , die durch  $F(R) = (kR + i)e^{\pm i k R}/R^3$  gegeben ist, im Unendlichen durch  $\sin kR/R$  (!) approximiert, gelangt er zu der völlig unhaltbaren Folgerung, daß die Amplitude der transversalen Kugelwelle im Unendlichen nicht abnimmt. Rubinowicz (Lwów).

**Savornin, Jean:** Étude de la diffraction éloignée. Ann. Phys., Paris 11, 129—255 (1939).

Es werden zunächst die verschiedenen älteren Arbeiten über Beugung an der geradlinigen Kante eines Schirmes besprochen. Anschließend wird über eigene systematische Untersuchungen eingehend berichtet. Die benutzten Schirme waren z. T. aus Stahl (neue und gebrauchte Rasierklingen), aus geschwärztem Stahl, aus durch Kathodenzerstäubung vergoldeten Stahlklingen sowie aus massivem Kupfer. Der Verf. bestätigt zunächst experimentell, daß das von einer geradlinigen Kante gebeugte Licht, herrührend von einem auf die Kante auffallenden Lichtstrahlenbündel geringer Öffnung, auf einem Kegel liegt, der die Kante zur Rotationsachse hat und durch die Verlängerung des einfallenden Strahles geht. Er untersucht dann für den Fall, daß die einfallenden Strahlen normal zur Kante des Schirmes verlaufen und unter  $45^\circ$  gegen die Kante linear polarisiert sind, die Schwingungsform des gebeugten Lichtes und findet, daß es immer elliptisch polarisiert ist, wobei die große Achse der Ellipse gedreht ist, also mit der beugenden Kante einen Winkel  $\neq 45^\circ$  bildet, der gemessen wurde. Desgleichen wurde die Elliptizität der Schwingung gemessen. Drehung der großen Achse und Elliptizität wachsen mit zunehmender Abweichung des gebeugten Strahls von der Richtung des einfallenden Strahls, haben aber im Gebiet des geometrischen Schattens und in dem des Lichtes verschiedenes Vorzeichen. Auch die Abhängigkeit der beiden Größen von der Richtung des einfallenden Lichtes gegen den beugenden Schirm (in der Ebene senkrecht zu Kante) sowie von der Wellenlänge des benutzten Lichtes wird untersucht. Eine Verminderung des Reflexionsvermögens des Schirmes vermindert den Betrag der Drehung der großen Achse wesentlich. Es wurde weiter die Intensität des gebeugten Lichtes in Abhängigkeit von dem Beugungswinkel gemessen, und zwar für zur Kante senkrecht und für zur Kante parallel polarisiertes einfallendes Licht. — Im zweiten Teil der Arbeit werden die experimentell gefundenen Werte der Intensität, der Elliptizität und der Drehung (der großen Achse des elliptisch polarisierten Lichtes) des gebeugten Lichtes verglichen mit den nach verschiedenen Theorien (Sommerfeld, Sommerfeld-Raman-Krishnan, Kirchhoff usw.) berechneten entsprechenden Werten. Der Verf. kommt zu dem Ergebnis, daß die von Raman und Krishnan modifizierte Sommerfeldsche Theorie der Beugung die Resultate mit sehr guter Genauigkeit wiedergibt. Die noch vorhandenen Abweichungen der experimentell gefundenen Werte von den theoretisch zu erwartenden sind gering und nach Ansicht des Verf. durch die Unvollkommenheiten des Schirmes, seiner geometrischen Form usw. bedingt. Picht (Potsdam-Babelsberg).

**Ditchburn, R. W.:** Diffraction by irregular gratings. Proc. roy. Irish Acad. A 44, 123—138 (1938).

Lord Rayleigh (vgl. Ges. Abh. Bd. I) hat 1879 bemerkt und durch Versuche bestätigt, daß das Auflösungsvermögen eines Prismenspektroskopes gesteigert wird durch Ausblendung der Lichtstrahlen, die den mittleren Teil des Prismas durchsetzen. Diese Tatsache wird dadurch bedingt, daß eben diese Strahlen in dem Teil der Beugungsfigur durch Interferenz nicht ausgelöscht werden, in dem die Intensität auf den halben

Maximalwert sinkt. Ihre Beseitigung durch eine Blende hat daher eine schlankere Gestalt des Hauptmaximums zur Folge, wenn auch dadurch eine unerwünschte Verstärkung des ersten Nebenmaximums eintritt. Verf. behandelt nun die Frage, inwieweit bei einem Stufen- oder auch bei einem ebenen Strichgitter das Auflösungsvermögen gesteigert werden kann, ohne daß ein allzu starkes Anwachsen der Nebenmaxima störende Geister veranlaßt. Bei dem Stufengitter erweist es sich als vorteilhaft, die Platten ungefähr an den beiden Stellen des Stufengitters abzublenzen, die eine Unterteilung der gesamten Plattenzahl in drei Teile bewirken. Durch diese Anordnung wird das erste Nebenmaximum verstärkt, während eine Abblendung der mittleren Platten schon eine Verstärkung des ersten Nebenmaximums ergibt. Mittels eines graphischen Verfahrens kann eine solche Anordnung durch Probieren noch verbessert werden. Beispielsweise kann mit einem Gitter mit 36 wirksamen Platten das Auflösungsvermögen eines normalen Stufengitters mit 65 Platten erreicht werden. Ferner wird ein ebenes Strichgitter diskutiert, das aus identischen Liniengruppen besteht, die jedoch nicht ganz regelmäßig aufeinanderfolgen. Schließlich wird das allgemeine Problem, die Herstellung eines Strichgitters mit vorgegebener Beugungsfigur, besprochen.

*Rubinowicz (Lwów).*

**Moon, Parry:** Basic principles in illumination calculations. J. Opt. Soc. Amer. **29**, 108—116 (1939).

Nach einer kurzen Zusammenstellung der verschiedenen Strahlungsenergiegrößen, die für den Beleuchtungsingenieur von Bedeutung sind und die er zu messen bzw. zu berechnen hat, weist der Verf. darauf hin, daß dies Gebiet der angewandten Optik lange Zeit sehr vernachlässigt wurde und erst in jüngster Zeit Versuche unternommen wurden, eine moderne, den Fortschritten der übrigen wissenschaftlichen Teilgebiete angepaßte Theorie der Beleuchtungsfragen zu entwickeln. Er gibt über die bisher vorliegenden Versuche einen zusammenfassenden und gleichzeitig erweiternden Überblick. Zunächst hält er es für erforderlich, neue Begriffe in die Theorie der Beleuchtungsfragen einzuführen, da bisher mit gleichem Namen verschiedene Eigenschaften und umgekehrt bezeichnet werden. Der Verf. entwickelt dann eine geometrisch-optische Feldtheorie der Beleuchtung, die der Theorie des elektrischen Feldes analog ist. Dieser Feldtheorie werden drei Größen zugrunde gelegt: der „Lichtfluß  $F$ “, d. h. der Fluß der strahlenden Energie, ferner der „Flußdichtevektor  $\mathfrak{D}$ “, der nach Richtung und Größe in jedem Punkte des Feldes durch das Maximum des Nettoflusses der Strahlungsenergie pro Flächeneinheit gegeben ist, endlich eine als „selance“ bezeichnete Verallgemeinerung der Helligkeit

(brightness), die definiert wird durch die Beziehung  $B = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{D}{\omega}$ , worin  $D$  den absoluten Betrag des Vektors  $\mathfrak{D}$  und  $\omega$  den Raumwinkel bezeichnet. Bezogen werden die einzelnen Grundgrößen auf die vom Verf. als „lamprosity-Funktion des Auges“ bezeichnete Empfindlichkeitskurve des Auges. Es werden anschließend die Beziehungen zwischen den Grundgrößen entwickelt. Einführung eines Vektorpotentials sowie eines skalaren Potentials. Ferner werden verschiedene Methoden zur Berechnung von  $\mathfrak{D}$  sowie zur Berechnung von  $F$  angegeben, die anschließend auf den Fall einer rechteckigen, ebenen leuchtenden Fläche als Lichtquelle und der durch sie hervorgerufenen Beleuchtung angewandt werden.

*Picht.*

**Nath, N. S. Nagendra:** The diffraction of light by supersonic waves. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **8**, 499—503 (1938).

Von C. V. Raman und N. S. Nagendra Nath ist in einer Reihe von Arbeiten [Proc. Indian Acad. Sci. **2**, 406 u. 413 (1935); **3**, 75, 119 u. 459 (1936)] eine vereinfachte Theorie der Lichtbeugung an Ultraschallwellen einer (strenggenommen unendlich dünnen) Flüssigkeitsschicht entwickelt worden: Die Phasenflächen der Lichtwelle werden beim Durchtritt durch ein Medium variablen Brechungsindex in leicht übersehbarer Weise gewellt, was dann mit Hilfe des Huygensschen Prinzips zur Beugungserscheinung führt. Später haben R. Extermann und G. Wannier [Helv. physica Acta **9**, 520 (1936)] sowie N. S. N. Nath [Proc. Indian Acad. Sci. **4**, 222 (1936)] im Anschluß an Arbeiten von L. Brillouin die Theorie streng entwickelt, d. h. die Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen im Schallfeld wirklich aufgesucht. Diese strenge Schlußweise führt jedoch bei den genannten Ausführungsformen, in denen nicht von vornherein eine Potenzentwicklung nach Größenordnungen der Intensität eingeführt ist, zu sehr umständlichen Rechnungen. In der vorliegenden Arbeit zeigt N. S. N. Nath,



daß die Intensitätsberechnung aus den Formeln der strengen Theorie auch in einfacher Weise erfolgen kann, wenn man sich von vornherein auf Beugungsstrahlen erster Ordnung beschränkt, was praktisch geringe Schallintensität oder geringe Schallfeldtiefe bedeutet. Eine tiefere theoretische Begründung (durch Störungsrechnung) dieser oder einer ähnlichen Beschränkung wird jedoch nicht gegeben. Die Resultate sind in einer Figur zusammengefaßt und mit den umständlich ermittelten Ergebnissen von Extermann und Wannier als übereinstimmend gefunden. Eine Schlußbemerkung zeigt, wie sie sinnvollerweise auf Beugung an der Longitudinalwelle eines Festkörpers anzuwenden sind.

Fues

**Fujiwara, Takeo, and Denroku Onoyama: Long curved X-ray spectral lines obtained by the method of convergent X-rays.** J. Sci. Hiroshima Univ. A 9, 115—123 (1939).

**Onoyama, Denroku: Light and dark X-ray diffraction patterns appearing as pairs obtained by convergent X-rays.** J. Sci. Hiroshima Univ. A 9, 125—128 (1939).

Es handelt sich um Durchstrahlungen mit weitgeöffnetem Primärkegel (sog. Weitwinkeldiagramme). Die Auswertung der Reflexkurven wird erläutert. — In der zweitgenannten Arbeit werden im direkten Strahlenkegel außer Reflexionslinien auch Extinktionslinien festgestellt und deren Entstehung erklärt. Die vom Verf. betonte Parallele zur Feinstruktur der Kossel- und Kikuchilinen besteht aber nur rein äußerlich, wie der Ref. betonen möchte. Mit diesem Punkt hat sich Laue (Ann. Phys. (5), 23, 705 (1935); dies. Zbl. 12, 236) bereits vor Jahren auseinandergesetzt. H. Ott.

**Gray, Frank: Electrostatic electron-optics.** Bell Syst. techn. J. 18, 1—31 (1939).

In der Arbeit werden die wichtigsten Formeln der elektrischen Elektronenoptik in etwas anderer als der üblichen Weise hergeleitet und auf Systeme, welche aus Lochblenden und Zylindern bestehen, angewandt.

Walter Glaser (Prag).

### Quantentheorie:

**Swirles, Bertha: The construction of zero order wave functions for complex atoms.** Mem. a. Proc. Manchester Literary & Philos. Soc. 82, 21—28 (1938).

Es wird gezeigt, wie die Wellenfunktion eines komplexen Atoms aus Eigenfunktionen einzelner Elektronen konstruiert werden kann. Die Arbeit baut auf früheren Arbeiten auf [B. Swirles, dies. Zbl. 13, 136; 15, 283; D. R. Hartree und B. Swirles, Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 240 (1937)], die sich mit der Erweiterung der Methode des „selfconsistent field“ auf relativistische Eigenfunktionen befassen. Sie hat auch Beziehungen zu der Methode von Gray und Wills [Phys. Rev. 38, 248 (1931); dies. Zbl. 2, 226] zur Konstruktion von Gesamtwellenfunktionen ( $S, L, M_S, M_L$ ) aus Einelektronenfunktionen ( $s, l, m_s, m_l$ ). In der vorliegenden Arbeit wird die  $(j, j)$ -Koppelung an die Spitze gestellt und zusammengesetzte Wellenfunktionen ( $j_1, \dots, j_N, J, M$ ) aus den Diracschen relativistischen Einelektroneneigenfunktionen ( $n, l, j, m$ ) konstruiert. — Es wird dabei von der für diese Funktionen gültigen Gleichung ausgegangen:

$$(j_x \pm i j_y) \psi(n, l, j, m) = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \psi(n, l, j, m \pm 1).$$

— Nun nimmt man Produkte solcher Funktionen  $\psi(n_k, l_k, j_k, m_k)$  für mehrere Elektronen  $k$ , bezeichnet sie mit  $\Phi(j_1, m_1; \dots, j_N, m_N)$  und die entsprechenden antisymmetrischen Funktionen mit  $A\Phi$ . Wenn  $J$  das totale Impulsmoment ist, gilt sowohl für  $\Phi$  wie für  $A\Phi$  die Gleichung

$$(J_x \pm i J_y) \Phi = \sum_{k=1}^N \sqrt{(j_k \mp m_k)(j_k \pm m_k + 1)} \Phi(j_1, m_1; \dots; j_k, m_k \pm 1; \dots; j_N, m_N).$$

Wenn das totale Impulsmoment  $J$  und seine Komponente  $M$  gegeben sind, wird die zugehörige Wellenfunktion mit  $\Psi'(j_1, j_2, \dots, j_N, J, M)$ , die entsprechende antisymmetrische und normierte Funktion mit  $A\Psi'$  bezeichnet. Die beiden obigen Gleichungen erlauben dann, die Funktionen  $\Psi'$  mit Hilfe der  $\Phi$  auszudrücken. Dies wird an Hand der Konfigurationen ( $ns, n'p$ ) und  $(np)^2$  illustriert, und es wird gezeigt, wie in diesen beiden Fällen die Wellenfunktionen  $\Psi(S, L, J, M)$  aus den  $\Psi'(j_1, j_2, J, M)$  erhalten werden können.

Egil A. Hylleraas (Oslo).

Schüler, H., H. Gollnow und H. Haber: Über Molekülbildungsprozesse mit und ohne Boltzmann-Verteilung und über Umwandlung von Translations- in Rotationsenergie. *Z. Physik* **111**, 484—494 (1939).

In einer Hohlkathode wird in einer Edelgasatmosphäre (He, Ar, Kr) mit etwas Wasserstoffzusatz eine Entladung erzeugt. Mit Cu als Kathodenmaterial wird die CuH-Bande 4280 AE, mit Al die AlH-Bande 4241 AE untersucht. In der CuH-Bande ist bei einem Edelgasdruck  $p = 0,02$  mm die vom tiefsten Rotationszustand des angeregten Zustandes ausgehende Linie weitaus am stärksten, und auch bei  $p = 2$  mm sind die Intensitäten noch weit entfernt von denen, die einer Boltzmannverteilung der hier zu erwartenden Temperatur ( $500^\circ$  abs.) entsprechen würden. In der AlH-Bande, die auch ohne Wasserstoffzusatz infolge des im Al gebundenen Wasserstoffs stets auftritt, wird eine Intensitätsverteilung gefunden, die bei  $p = 0,03$  mm einer Boltzmannverteilung  $T = 1800^\circ$  abs., bei  $p = 4$  mm einer solchen mit  $T = 800^\circ$  abs., d. h. etwa der Temperatur des Gasraums entspricht; bei Zwischendrücken nähern sich zuerst die niedrigen Rotationsniveaus der  $800^\circ$  abs. entsprechenden Boltzmannverteilung. Die Deutung ist die folgende: CuH entsteht durch Aufprall eines positiven Ions auf die Cu-Oberfläche unter Bildung einer „Explosions-Verdampfungswolke“, in welcher benachbarte „Sprengstücke“ etwa die gleiche Geschwindigkeit haben, so daß ein entstehendes CuH keine Rotationsenergie besitzt; diese erhält es erst durch viele Zusammenstöße mit Edelgasatomen aus deren Translationsenergie. Dagegen bildet sich das AlH bereits in der Kathodenoberfläche und erhält durch Ionenaufprall sofort die der Temperatur der Verdampfungswolke ( $1800^\circ$  abs.) entsprechende Rotationsverteilung, die dann durch Zusammenstöße in diejenige der Gasraumtemperatur ( $800^\circ$  abs.) überführt wird; und zwar erfordert das bei den höheren Rotationszuständen mehr Zusammenstöße als bei den niederen.

H. O. Kneser (Marburg).

Schüler, H., H. Gollnow und H. Haber: Zur Deutung der als „Druckeffekt“ bezeichneten Erscheinung im Spektrum des Aluminiumhydrides. *Z. Physik* **III**, 508—513 (1939).

Die vorstehend referierten Versuche an der AlH-Bande 4241 AE werden mit einer größeren Kathode wiederholt. Hier gelingt bei gleicher Stromstärke, also geringerer Stromdichte, eine Aufnahme, bei der die niedrigen Rotationsniveaus nach einer Boltzmannverteilung mit  $300^\circ$  abs., die höheren mit  $1800^\circ$  abs. besetzt sind. Die Deutung ist wieder die, daß die in der Kathodenoberfläche bereits vorhandenen AlH-Molekeln mit einer hohen „Verdampfungstemperatur“ ( $1800^\circ$  abs.) abgelöst werden und sich dann infolge von Zusammenstößen auf die (bei der geringeren Stromdichte niedrigere) Temperatur des Gasraums umstellen. Dadurch wird auch der häufig diskutierte „Druckeffekt“ erklärt, der darin besteht, daß die Anzahl der beobachtbaren Rotationslinien in ganz bestimmter Weise vom Druck und von der Temperatur des Entladungsraumes abhängt.

H. O. Kneser (Marburg).

Biedermann, M. M., and S. R. de Groot: Note on the electronic energy of the ground state of methane. (*Waals Laborat., Univ., Amsterdam.*) *Physica*, Haag **6**, 421—424 (1939).

Die Arbeit behandelt die chemische Bindung im  $\text{CH}_4$ -Molekül. In nullter Näherung wird das Molekül dabei als aus fünf getrennten Ionen, und zwar aus einem  $\text{C}^{++++}$ -Ion und vier  $\text{H}^-$ -Ionen bestehend angenommen. Das  $\text{C}^{++++}$  wird als positive Punktladung aufgefaßt, die Elektroneneigenfunktion des  $\text{H}^-$  wird als Produkt zweier wasserstoffähnlicher  $1s$ -Funktionen mit geeigneter effektiver Kernladungszahl dargestellt. Die Wechselwirkungsenergie der 5 Ionen in Tetraederanordnung wird als Funktion des CH-Abstandes in erster Näherung ohne Berücksichtigung des Austausches berechnet. Für den CH-Abstand des Energieminimums ist die Übereinstimmung mit der Beobachtung befriedigend, weniger für den zugehörigen Energiewert selbst.

Maue (München).



**Pirenne, Maurice Henri:** Untersuchung des Moleküls  $\text{SiHCl}_3$  mit Röntgeninterferenzen. *Physik. Z.* **40**, 145—158 (1939).

**Clark, C. H. Douglas, and John L. Stoves:** The calculation of equilibrium internuclear distance for diatomic hydrogen, hydrides, and deuterides in ground and excited states. *Philos. Mag.*, VII. s. **27**, 389—403 (1939).

Verschiedene empirische Formeln, die den Kernabstand zweiatomiger Molekeln durch die Massen, die Schwingungsfrequenz und gewisse vom Typ der Elektronen-anordnung und der Stellung der Atome im System der Elemente abhängige Konstante ausdrücken, werden auf eine Anzahl empirisch gut bekannter Molekeln angewandt. *F. Hund* (Leipzig).

**Boer, J. de, and A. Michels:** Quantum-mechanical calculation of the second virial-coefficient of helium at low temperatures. *Physica*, Haag **6**, 409—420 (1939).

Unter Benutzung eines Wechselwirkungspotentials in der Form von Lennard-Jones haben die Verf. (vgl. dies. Zbl. **19**, 428) einen Ausdruck für den zweiten Virialkoeffizienten  $B$  abgeleitet und hieraus durch Vergleich mit den experimentellen Werten von  $B$  für  $T > 40^\circ \text{ K}$  die Konstanten des Lennard-Jones-Potentials für die Wechselwirkung He-He bestimmt. Dieses Potential wird jetzt verwendet zur numerischen Berechnung der Phasendifferenzen der Streuwellen verschiedener Ordnung bezüglich der einfallenden Welle. Mit Hilfe der Phasendifferenzen werden die Wirkungsquerschnitte für den Stoß He-He und  $B$  für die Temperaturen  $2,59^\circ$ ,  $3,09^\circ$  und  $4,22^\circ \text{ K}$  berechnet und in guter Übereinstimmung mit dem Experiment befunden. Weiter wird noch das Verhalten des zweiten Virialkoeffizienten für sehr tiefe Temperaturen bezüglich des Einflusses der Existenz von diskreten Energieniveaus diskutiert. *Reinsberg*.

**Piekara, Arcadius:** Influence de l'interaction moléculaire sur la biréfringence magnétique des liquides polaires. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **208**, 990—992 (1939).

Die zur Erklärung der dielektrischen Polarisierung von Debye eingeführten Kopplungskräfte — sie rühren her von einer größeren Zahl von Nachbarmolekülen, die eine gewisse Ordnung aufweisen — hat der Verf. durch eine weitere Kopplungskraft ergänzt [*Acta Physica Polon.* **6**, 130 (1937)], die durch ein einziges Nachbarmolekül in großer Nähe bedingt wird. Die Debyesche Kopplungskraft ergibt für den Reduktionsfaktor der Cotton-Mouton-Konstanten  $R = 3 \frac{L}{y} \left( 2 - 3 \frac{L}{y} \right)$ , die Piekarasche Kraft  $R = 2 - 3 \frac{L}{y}$ , worin  $y = \frac{E}{kT}$  mit  $E$  als Kopplungsenergie und  $L(y)$  die Langevinsche Funktion ist.  $L(y)$  wird bestimmt aus dem experimentellen Reduktionsfaktor für die Molekularpolarisation,  $R_p = 1 - L(y)$ . Ein Vergleich mit den Messungen von H. König [*Ann. Physik* **31**, 289 (1938)] zeigt, daß die Piekarasche Kopplungskraft den wesentlichen Anteil der Kopplungskräfte ausmacht. *Reinsberg* (Bonn).

**Levine, S.:** Problems of stability in hydrophobic colloidal solutions. I. On the interaction of two colloidal metallic particles. General discussion and applications. *Proc. roy. Soc., Lond. A* **170**, 145—164 (1939).

Unter Heranziehung der Debye-Hückel-Theorie der starken Elektrolyte berechnet Verf. die elektrische Energie zwischen zwei kolloidalen, hydrophoben, metallischen Partikeln von Kugelgestalt nach einem Näherungsverfahren zu  $Q_0^2/Da f(R/a, \kappa a) = \zeta^2 Da(1 + \kappa a)^2 f(R/a, \kappa a)$ ; hierin bedeuten  $Q_0$  die elektrische Ladung einer jeden Partikel,  $a$  den Partikelradius,  $D$  die Dielektrizitätskonstante des Wassers,  $1/\kappa$  die Dicke der Ionenwolke,  $R$  die Distanz zwischen den Partikeln und  $\zeta$  das Potential, welches sich aus der kataphoretischen Beweglichkeit ergibt. Dabei ist die angenäherte Potentialgleichung  $\Delta\psi = \kappa^2\psi$  benutzt [vgl. *Elektrolytmonographie* des Ref. Gl. (204)]. Die Diskussion ergibt, daß die elektrischen Kräfte zwischen beiden Partikeln bei geringen Entfernungen abstoßend sind, bei einer bestimmten Distanz, die dem Energie-minimum entspricht, Null sind und bei größeren Entfernungen anziehend wirken. Die Kontaktenergie der Teilchen (entsprechend  $R = 2a$ ) nimmt mit zunehmender

Elektrolytkonzentration rapide ab. Der Energieausdruck wird auch bei konstantem  $\zeta$  diskutiert. Die Berücksichtigung der van der Waalsschen Anziehungsenergie bewirkt, daß die totale Energie bei einer bestimmten Distanz in der Nähe von  $2a$  einen Maximalwert annimmt, welcher der kontrollierende Faktor bei der Koagulation ist; mit wachsender Elektrolytkonzentration sinkt dieses Maximum. Weitere Anwendungen werden besprochen. [Auf die „Wichtigkeit, die Ideengänge der modernen Elektrolyththeorie auf das Gebiet der Kolloide zu übertragen“ haben bereits Ref. und W. Fischer in einer Arbeit in der Physik. Z. **34**, 786ff. (1933) hingewiesen; der Ref.] *Falkenhagen*.

**Levine, S.: Problems of stability in hydrophobic colloidal solutions. II. On the interaction of two colloidal metallic particles: Mathematical theory.** Proc. roy. Soc., Lond A. **170**, 165—182 (1939).

Die detaillierte mathematische Methode zur Berechnung der gegenseitigen Energie zweier kolloidaler metallischer Partikel wird entwickelt; es werden erste und zweite Näherungswerte für diese Energie abgeleitet. Ferner wird gezeigt, daß die Debye-Hückel-Theorie auf kolloidale Lösungen noch besser angewandt werden kann als auf starke elektrolytische Lösungen. (Es wäre von Interesse, die Theorie auch auf irreversible Vorgänge z. B. den Debye-Falkenhagenschen Dispersionseffekt, den Wien-Effekt, die Viskosität, Diffusion usw. auszudehnen; d. Ref.) *Falkenhagen* (Dresden).

**Guareschi, Pietro: Sulla variazione della viscosità dei liquidi con la temperatura.** Atti Accad. Sci. Torino **74**, 118—136 (1939).

**Guareschi, Pietro: Sulla variazione della tensione superficiale in funzione della temperatura.** Atti Accad. Sci. Torino **74**, 137—146 (1939).

**Sibaiya, L., and M. Rama Rao: Surface tension and Lindemann frequency.** Nature, Lond. **143**, 723 (1939).

Die Oberflächenspannung  $\gamma$  am Schmelzpunkt wird gleich der Gesamtenergie pro Flächeneinheit der Moleküle einer Oberflächenschicht gesetzt; die Moleküle sollen voneinander unabhängig harmonisch mit der Lindemannschen Frequenz  $\nu = 2,80 \cdot 10^{12} \cdot \sqrt{T_s/(M V^{2/3})}$  schwingen,  $T_s$  ist die Schmelztemperatur,  $M$  das Molekulargewicht,  $V$  das Molvolumen. Dann folgt unter der weiteren Annahme, daß am Schmelzpunkt Schwingungsweite und Molekülabstand für alle betrachteten Substanzen einander proportional sind, daß  $\nu = k \sqrt{\gamma/m}$ ;  $m$  = Molekülmasse. Die Zahl  $k$  liegt für 46 untersuchte Substanzen, (die aber nicht angegeben werden) zwischen 1 und 3,5. *Bechert* (Gießen).

**Wolkenstein, Th.: On the electron conductivity of dielectrics in strong fields.** J. techn. Physics, Leningrad **9**, 171—187 (1939) [Russisch].

**Neugebauer, Th.: Theorie des Cotton-Mouton-Effektes in der Quantenmechanik.** Z. Physik **112**, 257—277 (1939).

Die quantenmechanische Formel für die Cotton-Mouton-Konstante wird allgemein angeschrieben; die in der Formel auftretenden Summen werden nach dem von van Vleck angegebenen Verfahren angenähert ausgewertet. Zuerst wird der Fall eines zweiatomigen Moleküls behandelt, dessen Grundzustand soweit aufgespalten ist, daß nur das tiefste Niveau bei gewöhnlicher Temperatur merklich besetzt ist; weiter die Fälle mittlerer und verschwindend kleiner Multiplettaufspaltung des Grundzustandes mit und ohne Vorhandensein eines Bahnmomentes, dann mehratomige Moleküle mit und ohne Spinnmoment und paramagnetische Ionen. Qualitative Bemerkungen über den Vergleich der Rechenergebnisse mit den Messungen. *Bechert* (Gießen).

**Barchewitz, Pierre, et Maurice Parodi: Spectres d'absorption dans l'infrarouge lointain (20 à 60 microns) des dérivés halogénés du méthane et des dérivés monosubstitués du benzène.** J. Phys. Radium, VII. s. **10**, 143—150 (1939).

Die hier mitgeteilten ultraroten Absorptionsspektren von  $\text{CCl}_4$ ,  $\text{CBr}_4$ ,  $\text{HCCl}_3$ ,  $\text{HCCBr}_3$ ,  $\text{HCl}_3$ ,  $\text{H}_2\text{CCl}_2$ ,  $\text{H}_2\text{CBr}_2$ ,  $\text{H}_2\text{CJ}_2$ , ferner von Benzol  $\text{C}_6\text{H}_6$  und etlichen seiner Monoderivate  $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{X}$  (mit  $\text{X} = \text{NH}_2$ ,  $\text{CH}_3$ ,  $\text{CN}$ ,  $\text{OCH}_3$ ,  $\text{Cl}$ ,  $\text{NO}_2$ ,  $\text{Br}$ ,  $\text{J}$ ) sind des-



halb von theoretischem Interesse, weil sie einerseits das sehr selten bearbeitete Frequenzgebiet zwischen 100 und  $580\text{ cm}^{-1}$  („fernes“ Ultrarot,  $\lambda = 100$  bis  $17\text{ }\mu$ ) betreffen und andererseits sich auf hochsymmetrische Moleküle mit leichter übersehbaren Schwingungsspektren beziehen. Die Ergebnisse fügen sich gut in die durch die Kenntnis und Deutung der Ramanspektren bereits vorgegebene Erwartung ein. *Kohlrausch*.

**Kohlrausch, K. W. Fritz: Quantenhafte Lichtstreuung. Der Smekal-Raman-Effekt.** Physik i. regelm. Ber. 7, 79—88 (1939).

**Ciccione, Anna: Gli spettri ultrarossi e Raman delle molecole.** Nuovo Cimento, N. s. 15, 482—521 (1939).

In Form eines Berichtes wird eine Einführung in die Theorie der Molekülschwingungen und ihre Beobachtbarkeit in Absorption und Ramaneffekt gegeben. Es handelt sich um einen Auszug aus ausführlichen Darstellungen, wie man sie bei Teller (Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik 9/II), Stuart (Berlin: Julius Springer 1934), Sponer (Berlin: Julius Springer 1935/36), Kohlrausch (Berlin: Julius Springer 1931 u. 1938) findet.

*Kohlrausch (Graz).*

**Mizushima, San-ichiro, and Yonezo Morino: Raman spectra and molecular configurations of solid ethylene dihalides.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 8, 315—322 (1938).

Die Autoren haben in früheren Arbeiten gezeigt, daß die Ramanspektren von eingefrorenen Äthylendihalogeniden (z. B.  $\text{Cl} \cdot \text{H}_2\text{C} \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{Cl}$ ) wesentlich linienärmer sind als die der flüssigen Substanzen. Mit Durchrechnung des Schwingungsproblems und durch Untersuchung des Isotopieeffektes wurde sichergestellt, daß das Molekül im festen Zustand in der ebenen „Trans-Form“, also als Zickzackkette vorliegt. Außer den zu Normalschwingungen der Trans-Kette gehörigen Ramanlinien werden aber am festen Zustand auch solche ganz niederer Frequenz ( $\omega \sim 40$  bis  $100\text{ cm}^{-1}$ ) beobachtet, deren Verhalten sich bei Passieren des Übergangspunktes ( $-65^\circ$  bei  $\text{C}_2\text{H}_4\text{Cl}_2$ ,  $-24^\circ$  bei  $\text{C}_2\text{H}_4\text{Br}_2$ ) ändert. Diese Linien werden Gitterschwingungen zugeschrieben.

*Kohlrausch (Graz).*

**Sauvenier, H.: L'effet Auger et l'émission des raies spectrales du domaine intermédiaire.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 151—154 (1939).

Der Augereffekt wird nach qualitativer Abschätzung verantwortlich gemacht 1. für die Linienbreite der K- und L-Strahlung des Mg und Al, 2. für die beträchtliche Breite der Strahlung, die aus mittleren Atomtiefen kommt, 3. für das Fehlen der Strahlung, die den Übergängen der freien Elektronen gegen  $L_I$  bei Mg und Al entspricht. *H. Ott*.

**Elenbaas, W.: Über das kontinuierliche Spektrum des Quecksilberbogens.** Physica, Haag 6, 299—302 (1939).

Vergleich der Intensitätsmessungen im kontinuierlichen Spektrum eines Quecksilberhochdruckbogens mit der von Unsöld (dies. Zbl. 20, 85) gegebenen Theorie. Berechnete und gemessene Werte stimmen bis auf einen Faktor von etwa 10 überein, was bei der Unsicherheit der Messungen und den Vernachlässigungen der Rechnung als ausreichende Übereinstimmung betrachtet werden kann.

*Beckert (Gießen).*

**Saha, M. N., and R. N. Rai: On the ionization of the upper atmosphere.** Proc. Nat. Inst. Sci. India 4, 319—336 (1938).

Es wird versucht, die beiden Theorien der Ionisation höchster atmosphärischer Schichten zu vergleichen und ihre Verschiedenheit zu ergründen. Es handelt sich um die Pannekoeksche Theorie (1926), welche auf thermodynamischer Grundlage aufgebaut, sich auf die Sahasche Theorie der thermalen Ionisation stützt, die von Milne (1924) und Woltjer (1925) ergänzt wurde, und um die Chapmansche Theorie, in der vorausgesetzt wird, daß die Ionisation durch die Absorption von monochromatischem Licht in einer ihre Dichtigkeit exponentiell ändernden Atmosphäre entsteht. Die Verff. finden, daß zwischen beiden Theorien kein grundsätzlicher Unterschied besteht. Wenn in der Chapmanschen Theorie der Proportionalitätsfaktor  $\beta$ , welcher zur Bestimmung der Elektronenanzahl der absorbierten Strahlung

dient, durch den Wert  $\frac{1}{h\nu}$  ersetzt wird und die Theorie auf kontinuierliche Strahlung erweitert wird, erhält man die Pannekoekschens Resultate. Für den Absorptionskoeffizient  $\tau(\nu)$  wird eine wellenmechanische Formel anstatt der Kramersschen benützt. Die Verff. erweitern den Gültigkeitsbereich der Chapmanschen Formel für die Änderung der Elektronenerzeugung mit der Höhe auf kontinuierliches Licht. Werte für die Elektronenerzeugung aus O-Atomen in der F-Schicht am Mittag werden berechnet und mit den Appletonschen Resultaten verglichen. *Slouka (Prag).*

**Fabrikant, V. A.:** Excitation of atoms and inelastic losses in gas discharge. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Physique Nr 4, 460—462 u. engl. Zusammenfassung 462—464 (1938) [Russisch].

Die Konzentration metastabiler Atome in einem zylindrischen Entladungsrohr nimmt von der Mitte zum Rand ab. Berücksichtigt man nur ihre Erzeugung durch Elektronenstoß und die Diffusion zur Wand, so ist die Konzentration eine Besselsche Funktion der Radialkoordinate. Das gleiche gilt, wenn man die Stöße 2. Art mit Elektronen berücksichtigt. Sind auch Stöße 2. Art mit Atomen zu beachten, so ist die Abhängigkeit der Konzentration über den Querschnitt komplizierter. Die Abweichungen von der einfachen Besselschen Funktion verändern auch das Gesetz der Diffusion zur Wand. Hierdurch kann die Berechnung der Konzentration metastabiler Atome aus der Wanddiffusion gefälscht werden. Die unelastischen Verluste müssen unter Berücksichtigung der angeregten Atome berechnet werden, da durch die Stöße 2. Art eine der Konzentration proportionale Energiemenge an die Elektronen zurückgeliefert wird. *Walter Weizel (Bonn).*

**Granovsky, V. L.:** The deionization of gas in the after-discharge period. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Physique Nr 4, 419—436 u. engl. Zusammenfassung 436—439 (1938) [Russisch].

Die Prozesse bei der Rückbildung eines Plasmas mit und ohne Spannung an den Elektroden werden beschrieben. — Hierbei ändert sich die Verteilung der Elektronen auf die ungeordnete Geschwindigkeit mit der Zeit nach der Formel

$$f(t, c) = A \exp \left\{ \frac{3am}{M} t - hc^2 e^{\frac{2am}{M} t} \right\},$$

wenn für den Wirkungsquerschnitt der Impulsübertragung  $Q = a/c$  gesetzt wird,  $h = m/2kT_e(0)$  bedeutet,  $m$  die Elektronenmasse,  $M$  die Molekülmasse und  $T_e(0)$  die Elektronentemperatur ist. Die beim Abschalten einer stationären Entladung vorhandene Maxwellverteilung bleibt bei der Plasmarückbildung bestehen. In Hg-Dampf von 0,03 Torr fällt  $T_e$  in  $3 \cdot 10^{-4}$  sec auf  $1/e$ . — Der Einfluß der ambipolaren Diffusion auf die Entionisierung wird berechnet. Hierbei ist zu beachten, daß der Diffusionskoeffizient sich bei der Abnahme von  $T_e$  ändert. — Im 2. Teil der Arbeit werden Versuche über die Entionisierung in Quecksilberdampf beschrieben. *Walter Weizel.*

**Thiessen, P. A., und K. Molière:** Über den Einfluß der Absorption auf den Brechungseffekt der Elektronenstrahlen. I. Messungen des inneren Potentials an den polaren Tetraederflächen der Zinkblende. II. Versuch eines formalen Absorptionsansatzes im Rahmen der Betheschen Theorie. Ann. Physik, V. F. 34, 449—472 (1939).

Es ist bekannt, daß das innere Potential  $V_0$ , das man aus der Verschiebung der Elektroneninterferenzen gegen die Braggsche Lage nach der Formel  $V_0/E = \sin^2 \vartheta_B - \sin^2 \vartheta$  berechnet, einen Gang mit der Ordnung der Interferenz zeigt. Darüber hinaus wurde nun im I. Teil der vorliegenden Arbeit gefunden, daß dieser Gang an den beiden Seiten der polaren Tetraederfläche der Zinkblende nicht der gleiche ist. Da diese Durchbrechung des Friedelschen Satzes den Gedanken nahelegte, es könnte der Unterschied zwischen (111) und  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ , ja vielleicht die ganze anomale Linienverschiebung ein Absorptionseffekt sein, wurde im II. Teil der Arbeit das Zweistrahlproblem der dynamischen Interferenztheorie für den symmetrischen Braggfall unter Berücksich-



tigung der Absorption durchgerechnet. Das periodische Kristallpotential wurde dabei komplex, jedoch mit ortsunabhängiger Phase angesetzt. Wie schon in Analogie zu den Röntgeninterferenzen zu erwarten steht, ergibt sich eine Absorptionsverschiebung der Interferenz, indem die Ewaldsche Baumstumpfkurve durch unsymmetrische Abflachung nach größeren Winkeln gedrückt wird. Ob diese Verschiebung zur Erklärung des Ganges von  $V_0$  ausreicht, oder ob noch die diesbezüglichen Betrachtungen von Laue und Kikuchi mit herangezogen werden müssen, ist mangels genauer empirischer Werte des Absorptionskoeffizienten zur Zeit nicht zu entscheiden. Dagegen scheint nach einer Überschlagsrechnung der Verff. die Absorption keine ausreichende Erklärung für den Unterschied zwischen (111) und ( $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ) zu liefern, der wahrscheinlich durch strukturelle Verschiedenheit der beiden Oberflächen verursacht ist. *H. Ott.*

**Brill, R., H. G. Grimm, C. Hermann und Cl. Peters:** Anwendung der röntgenographischen Fourieranalyse auf Fragen der chemischen Bindung. *Ann. Physik*, V. F. **34**, 393—445 (1939).

Die Arbeit, die sich mit drei typischen Vertretern der chemischen Bindung, nämlich dem NaCl (heteropolar), dem Diamant (homöopolar) und dem Hexamethylenetetramin (van der Waalssche Bindung) befaßt, stellt wohl die sorgfältigste Fourieranalyse dar, die bis jetzt ausgeführt wurde. Da es nach der Problemstellung auf zuverlässige Details in der Elektronendichte ganz besonders *zwischen* den Atomen ankam, war nicht nur eine äußerst genaue Intensitätsmessung (ionometrisch) nötig, sondern auch die Ausschaltung aller das Streuvermögen fälschender Fehlerquellen wie Absorption, primäre und sekundäre Extinktion, Umwegenregung usw. Besonderes Augenmerk richteten die Autoren auch auf folgende Fehlerquelle: Bei Gittern mit scharf voneinander abgesetzten Automen konvergiert die Fourierreihe so langsam, daß selbst bei Verwendung harter Röntgenstrahlung Interferenzen von merklichem Betrage noch außerhalb des Beobachtungsbereiches ( $\sin \vartheta > 1$ ) fallen können. Die Nichtberücksichtigung solcher Fourierglieder bei der Summation erzeugt dann Abbruchswellen, wodurch Elektronenanhäufungen vorgetäuscht werden können. Zur Beseitigung solcher Abbruchswellen benutzen die Verff. konvergenzerzeugende Faktoren von der Form  $e^{-\beta \sin^2 \vartheta}$ , die sich geometrisch als eine kugelsymmetrische Verschmierung der Atome deuten lassen oder physikalisch als zusätzliche (isotrope) Wärmebewegung. Das Ergebnis der Analyse zeigt nun tatsächlich charakteristische Unterschiede zwischen heteropolarer und homöopolarer Bindung. Während im ersten Fall (NaCl) die Elektronendichte zwischen den Ionen praktisch auf Null absinkt, wurden im zweiten Fall (Diamant) Elektronenbrücken von beträchtlicher Dichte auf den Atomverbindungsstellen gefunden. Beim  $C_6H_{12}N_4$  entspricht die Elektronendichte nicht durchaus der vermuteten van der Waalsschen Bindung, sondern es sind ganz schwache Elektronenbrücken zwischen den Molekeln vorhanden, welche sich als Restvalenz deuten lassen. Für weitere interessante Einzelheiten muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. Die Untersuchung wird mit anderen Substanzen fortgesetzt. *H. Ott (Würzburg).*

**Duyckaerts, Georges:** Les chaleurs spécifiques du fer entre  $1,5^\circ$  et  $20^\circ$  K. *C. R. Acad. Sci., Paris* **208**, 979 (1939).

Zwischen  $1,5$  und  $20^\circ$  K läßt sich die gemessene spezifische Wärme des Eisens darstellen durch  $464,5 (T/465)^3 + 1,20 \cdot 10^{-3} T$  cal pro Grammatom und Grad (= spezifische Wärme der Gitterschwingungen + der des Elektronengases).

*J. Meixner (Gießen).*

**Veen, J. H. van der, and L. S. Ornstein:** The behaviour of the reflecting power of iron for visible light near the Curie-point and the  $\alpha/\gamma$ -transition point. *Physica*, Haag **6**, 439—452 (1939).

Messungen des Reflexionsvermögens  $R$  von Eisen im sichtbaren Gebiet;  $R$  hat als Funktion der Temperatur einen Sprung am  $\alpha/\gamma$ -Umwandlungspunkt ( $1198^\circ$  abs.) und eine kontinuierliche Anomalie (eine Ausbiegung der Kurve) am Curiepunkt ( $1050^\circ$ ). Das weist darauf hin, daß der Umwandlungspunkt ein Übergangspunkt erster Ord-

nung ist, der Curiepunkt ein solcher zweiter Ordnung. Der Sprung liegt für Wellenlängen zwischen 4500 und 8500 Å an der gleichen Stelle, die Lage der Ausbuchtung ist abhängig von der Wellenlänge. Die bisherigen theoretischen Behandlungen der Frage geben keine befriedigende Beschreibung der Ergebnisse [Kronig, Proc. Roy. Soc. 124, 409 (1929); dies. Zbl. 2, 373; Fujioka, dies. Zbl. 4, 383; Mott-Jones, The theory of the properties of metals and alloys, S. 111. Oxford 1936]; insbesondere sollte  $R$  mit zunehmendem  $T$  abnehmen, während es nach den Messungen fast im ganzen Gebiet zunimmt. Bechert (Gießen).

**Becquerel, Jean, et J. van den Handel: Le métamagnétisme.** J. Phys. Radium, VII. s. 10, 10—13 (1939).

**Becker, R.: Ferromagnetismus bei hochfrequenten Wechselfeldern.** (14. Dtsch. Physik.- u. Math.-Tag, Baden-Baden, Sitzg. v. 11.—16. IX. 1938.) Z. techn. Physik 19, 542—546 u. Physik. Z. 39, 856—860 (1938).

Für die ferromagnetischen Erscheinungen gibt es zwei kurzwellige Grenzen. Die eine betrifft die reversible Permeabilität und liegt für Eisen in der Größenordnung von 15 cm Wellenlänge, die andere betrifft die irreversible Permeabilität und wird zu etwa  $75/H$  m Wellenlänge ( $H$  = Stärke des Magnetfelds in Gauß) abgeschätzt. Beide Grenzen ergeben sich durch elektromagnetische Betrachtungen, indem die bei einer Wandverschiebung zwischen verschiedenen magnetisierten Bezirken auftretende Änderung der Magnetisierung einen elektrischen Strom und dieser wieder ein magnetisches Bremsfeld erzeugt. Bei den reversiblen Wandverschiebungen wird angenommen, daß die Wand durch eine zur Verschiebung proportionale Kraft an eine Gleichgewichtslage gebunden ist, bei den irreversiblen Wandverschiebungen wird dagegen angenommen, daß eine Wand den Durchmesser eines Weisschen Bezirks hemmungslos durchlaufen kann, solange man vom Bremsfeld absieht (Barkhausensprung), Messungen der Permeabilität bei hohen Frequenzen führen so zu neuen Aussagen über die Größe der Weisschen Bezirke. J. Meixner (Gießen).

**Roubaud-Valette, Jean: Sur la possibilité de construire des équations d'ondes relatives à des particules de spin multiple de  $(1/2)$  ( $h/2\pi$ ).** C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1076—1078 (1939).

Par addition directe de deux matrices du type de Dirac (écrites sous forme de nombres hypercomplexes) l'auteur établit des équations d'onde pour des particules avec un spin plus grand que  $1/2$ . La discussion importante sur le caractère positif de l'énergie et la réduction des équations à un spin univoque ne sont pas publiées. Nous remarquons que ces deux questions ont été discutées à fond dans des mémoires de Fierz (voir ce Zbl. 20, 189) et Dirac (voir ce Zbl. 14, 423). Stueckelberg (Genf).

**Caldirola, P.: Nuova forma delle equazioni gravitazionali della relatività generale. Deduzione delle equazioni ondulatorie del campo elettromagnetico e del campo materiale.** Nuovo Cimento, N. s. 15, 594—603 (1938).

Verf. scheint die Leibnizsche Regel für Differentiation eines Produktes nicht zu kennen, es wird wiederholt falsch differentiiert und bekannte Formeln der Analysis falsch angewendet. Soweit die Arbeit nicht Trivialitäten enthält, ist sie physikalisch und meist auch mathematisch unrichtig. Bechert (Gießen).

**Proca, A.: Sur la longueur fondamentale attachée aux particules élémentaires.** C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1074—1075 (1939).

Partant d'une expression pour le  $ds^2$  dans l'espace-temps ordinaire et dans des espaces de spin et de spin isotopique, l'auteur a obtenu une formule qui exprime la masse des particules élémentaires comme fonction quadratique de leur charge et de leur spin. Les constantes disponibles dans cette théorie déterminent une longueur fondamentale de l'ordre de grandeur de  $10^{-13}$  cm. Malheureusement, l'établissement de cette formule à partir des considérations géométriques sur le  $ds^2$  ne se trouve ni dans cette communication, ni dans la publication antérieure (voir ce Zbl. 20, 331).

Stueckelberg (Genf).



**Mariani, Jean:** Le quantum de longueur et le spin des particules élémentaires. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 971—973 (1939).

Introduisant une géométrie non euclidienne pour l'espace à l'intérieur des particules élémentaires, l'auteur discute deux représentations géométriques dans lesquelles la distance entre deux points n'est définie qu'à des multiples de  $2\pi a$ , respectivement  $\pi a$  près ( $a$  représente le „rayon“ de la particule). L'analogie que l'auteur croit voir entre cette multiformité et les spins entiers et demi-entiers des particules élémentaires ne nous semble guère établie. *Stueckelberg* (Genf).

**Biben, Georges:** Sur les caractéristiques des équations du photon. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 883—884 (1939).

**Sokolov, A.:** Zur Möglichkeit einer Neutrinotheorie des Lichtes. III. Zurückführung des elektromagnetischen Feldes auf das Neutrino-feld. Ž. eksper. teoret. Fis. 8, 644—657 u. deutsch. Zusammenfassung 657 (1938) [Russisch].

Im wesentlichen übereinstimmend mit der referierten Arbeit in dies. Zbl. 20, 189.

*P. Jordan* (Rcstock).

**Christy, R. F., and S. Kusaka:** Electric quadrupole moment of the deuteron. Phys. Rev., II. s. 55, 665—666 (1939).

Das von Kellogg, Rabi, Ramsay und Zacharias (vgl. dies. Zbl. 20, 281) experimentell festgestellte elektrische Quadrupolmoment des Deuterons wird auf eine Spin-Bahn-Wechselwirkung zwischen Proton und Neutron zurückgeführt; ihr Betrag ist etwa von derselben Größe wie die gewöhnliche Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton. Daraus wäre zu schließen, daß der Gesamtspin der Teilchen in einem Kern nicht einmal angenähert eine Konstante der Bewegung ist und daß es daher auch keine Auswahlregeln für den Spin gibt.

*J. Meixner* (Gießen).

**Nagakura, Tosimitu:** On the method of treating the reaction between very light nuclei. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 977—996 (1938).

Die Eigenfunktion eines Systems vieler Protonen und Neutronen wird überlagert aus Gruppen von Eigenfunktionen, deren jede einer bestimmten Verteilung der Protonen und Neutronen auf zwei oder mehr Kerne entspricht. Daß eine Darstellung, die ausgeht von Eigenfunktionen einer bestimmten derartigen Verteilung, notwendigerweise auch Eigenfunktionen anderer Verteilungen enthalten muß, drückt das Auftreten von Übergängen zwischen den Verteilungen (Kernreaktionen) aus. Eine Methode der Berechnung dieser Übergänge wird angegeben und auf die  $D + D$ -Reaktion angewandt.

*C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

**Umeda, Kwai:** Über die Debyetemperatur des Flüssigkeitströpfchenmodells für den Atomkern. Sci. Pap. Inst. phys. chem. Res., Tokyo 35, 8—15 (1938).

Bethe gab eine Berechnung der Verteilung der Anregungsniveaus schwerer Kerne auf Grund der Vorstellung von Oberflächen- und Volumenschwingungen eines Flüssigkeitströpfchens [Rev. Modern Physics 9, 86 (1937)]. Diesen Ansatz verfeinert der Verf. dadurch, daß er die Endlichkeit der Teilchenanzahl durch Einführung einer „Debyetemperatur des Kerns“ berücksichtigt. Diese ergibt sich jedoch so hoch, daß für nicht allzu hohe Kernanregungen die Betheschen Daten nur unmerklich geändert werden. Nur bei leichteren Kernen ( $A < 50$ ) werden die Abweichungen merklich und liegen im Sinne einer Vergrößerung der Termabstände. — Im zweiten Teil werden die Oberflächenschwingungen nach einer Methode von Born und Courant [Physik. Z. 14, 731 (1913)] behandelt, die es gestattet, auch die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung zu berechnen, welche sich aber als äußerst gering ergibt (Änderung um weniger als  $10/100$  bei erreichbaren Kernanregungen). (Bethe, vgl. dies. Zbl. 17, 140.)

*H. Jensen* (Hamburg).

**Alihanian, A. J., and S. J. Nikitin:**  $\beta$ -ray spectrum of RaC and energy levels of excitation of RaC' nucleus. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 21, 28—30 (1938).

Das empirische kontinuierliche  $\beta$ -Strahl-Spektrum von RaC wird in Teilspektren der Konopinski-Uhlenbeck'schen Form zerlegt. Die von Ellis und Mott [Proc. Roy.

Soc. London A 141, 502 (1933)] in Anlehnung an das Spektrum der  $\gamma$ - und weitreichenden  $\alpha$ -Strahlen von RaC' gegebene Zerlegung bestätigt sich nicht. — An der oberen Grenze des Spektrums zeigt sich die bekannte Abweichung von der Konopinski-Uhlenbeckschen Form in sehr ausgeprägter Weise.  
C. F. v. Weizsäcker.

**Hahn, O., und F. Strassmann:** Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle. Naturwiss. 27, 11—15 (1939).

Bei der Beschießung von Uran durch Neutronen entstehen außer den „Transuranen“ drei (oder vier) weitere parallele Reihen, die mit einem Radiumisotop zu beginnen schienen. Ihre Halbwertszeiten werden hier genauer bestimmt. Außerdem zeigt sich aber, daß das scheinbare Radium in Wirklichkeit chemisch von Radium, nicht aber von Barium getrennt werden kann, ebenso das aus ihm entstehende scheinbare Actinium nicht von Lanthan. Man muß schließen, daß der Urankern unter dem Einfluß der Neutronen in zwei Bruchstücke zerfällt, deren einer das Barium ist.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

**Joliot, Frédéric:** Preuve expérimentale de la rupture explosive des noyaux d'uranium et de thorium sous l'action des neutrons. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 341—343 (1939).

Die von Hahn und Strassmann [Naturwiss. 27, 11 (1939); vgl. vorsteh. Ref.] entdeckte Spaltung von Uran durch Neutronen wird direkt bestätigt, indem radioaktive Materie in 3 mm Abstand von bestrahltem Uran aufgesammelt wird, die nur durch den Rückstoß bei der Spaltung dorthin gekommen sein kann. Dasselbe Phänomen zeigt Thorium.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

**Joliot, Frédéric:** Sur la rupture explosive des noyaux U et Th sous l'action des neutrons. J. Phys. Radium, VII. s. 10, 159—160 (1939).

Verf. schließt aus seinen Versuchen, daß die Art der Uranspaltung von der Energie der auftreffenden Neutronen abhängt; langsame Neutronen scheinen Spaltprodukte großer Halbwertszeit zu erzeugen. Bei Bestrahlung von Uran und Thorium erhält man eine beiden gemeinsame Halbwertszeit von 3,5 h, was nach dem chemischen Befund von I. Curie und P. Savitch auf die Entstehung des gleichen Folgeproduktes aus U und Th hinweist.  
Bechert.

**Hahn, Otto, und Fritz Strassmann:** Nachweis der Entstehung aktiver Bariumisotope aus Uran und Thorium durch Neutronenbestrahlung; Nachweis weiterer aktiver Bruchstücke bei der Uranspaltung. Naturwiss. 27, 89—95 (1939).

Es wird chemisch endgültig bewiesen, daß aus Uran durch Neutronenbestrahlung Barium entsteht. Dasselbe entsteht aus Thorium, jedoch nur durch schnelle Neutronen, während beim Uran auch langsame Neutronen wirken. Eines der gefundenen radioaktiven Bariumisotope läßt sich mit dem anderweitig bekannten Ba<sup>139</sup> identifizieren. Die Annahme, auch die bisher als „Transurane“ bezeichneten Körper seien ähnliche leichte Zerfallsprodukte, wird chemisch unwahrscheinlich gemacht. Das außer dem Barium entstehende zweite Bruchstück wird ebenfalls nachgewiesen, und zwar als Strontium und Yttrium. Die Erhaltung der Ladung fordert, daß, wenn eines der beiden Bruchstücke ein Erdalkali ist, das andere primär ein Edelgas ist, das dann erst durch zwei  $\beta$ -Zufälle auch in ein Erdalkali übergeht. In der Tat konnte ein Edelgas und ein aus ihm hervorgehendes Alkalimetall nachgewiesen, aber noch nicht bestimmt werden, ob es sich um Krypton oder Xenon handelt.  
C. F. v. Weizsäcker.

**Hahn, Otto, und Fritz Strassmann:** Über die Bruchstücke beim Zerplatzen des Urans. Naturwiss. 27, 163—164 (1939).

Das aus Uran durch Neutronen erzeugte Edelgas geht durch  $\beta$ -Zerfall in Barium über, ist also Xenon. Damit ist der Zerfall des Urans in Xenon und Strontium nachgewiesen.  
C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

**Droste, G. v.:** Über die Energieverteilung der bei Bestrahlung von Uran mit Neutronen entstehenden Bruchstücke. Naturwiss. 27, 198 (1939).

Die Kerntrümmer der Uranspaltung hatten Energien von 36, 43, 52, 59, 65, 74, 82, 90 MeV; das macht wahrscheinlich, daß außer den von Hahn und Strassmann gefundenen Spaltprodukten X und Sr noch andere vorkommen, z. B. auch Teilchen mit Massenzahlen von rd. 60 und 175. Die kinetische Energie der Bruchstücke ist etwa 130 MeV, die freiwerdende



Zerfallsenergie aber 180 MeV. Die Differenz von 50 MeV würde zur Emission von rd. 6 Neutronen zur Verfügung stehen. *Bechert (Gießen).*

**Meitner, Lise, and O. R. Frisch: Products of the fission of the uranium nucleus.** *Nature, Lond. 143, 471—472 (1939).*

Verff. schließen aus Versuchen, in denen sie die Zerfallsprodukte der Uranspaltung unter Ausnutzung ihres Rückstoßes auf einer Wasseroberfläche anreicherten, daß die bisher Transuranen zugeschriebenen  $\beta$ -Aktivitäten in Wirklichkeit Elementen zuzuschreiben sind, die leichter sind als Uran. *Bechert (Gießen).*

**Anderson, H. L., E. T. Booth, J. R. Dunning, E. Fermi, G. N. Glasoe and F. G. Slack: The fission of uranium.** *Phys. Rev., II. s. 55, 511—512 (1939).*

Der Wirkungsquerschnitt thermischer Neutronen für Uranspaltung wird nach Messungen zu  $2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  angegeben; die Ausbeute folgt einem  $1/v$ -Gesetz ( $v$  = Geschwindigkeit der Neutronen). *Bechert (Gießen).*

**Halban jun., H. von, F. Joliot and L. Kowarski: Liberation of neutrons in the nuclear explosion of uranium.** *Nature, Lond. 143, 470—471 (1939).*

Die Verff. schließen aus einem Vergleich der Dichteverteilung thermischer Neutronen, von denen die einen aus einer Uranylinitratlösung stammten, die anderen aus einer Ammoniumnitratlösung, daß bei der Uranspaltung Neutronen emittiert werden. Bedauerlich ist, daß bei der Erwähnung der Entdeckung der Uranspaltung die deutschen Entdecker Hahn und Strassmann, welche die Priorität für sich haben, nicht genannt werden. *Bechert.*

**Haenny, Charles, et Albert Rosenberg: Émission de neutrons lors de la rupture provoquée du noyau d'uranium. Possibilité de réaction par chaîne.** *C. R. Acad. Sci., Paris 208, 898—900 (1939).*

Es wird gezeigt, daß Umhüllung einer Neutronenquelle mit uranhaltigem Material die Neutronenzahl erhöht; aus der Hülle kamen bei den Versuchen bis zu 20% mehr Neutronen als die Quelle liefert. Auf die Möglichkeit, die hier auftretenden Kettenreaktionen praktisch auszunützen, wird hingewiesen. *Bechert (Gießen).*

**Dodé, Maurice, Hans von Halban jun., Frédéric Joliot et Lew Kowarski: Sur l'énergie des neutrons libérés lors de la partition nucléaire de l'uranium.** *C. R. Acad. Sci., Paris 208, 995—997 (1939).*

Beschreibung von Experimenten, nach denen die Neutronen, die bei der Zerspaltung von Urankernen durch langsame Neutronen ausgelöst werden, Energien von mehr als 2 MV haben, also wesentlich energiereicher als die primären Neutronen sind. Ob bei einer solchen Zerspaltung mehr als ein Neutron ausgesandt wird, läßt sich auf Grund dieser Experimente nicht entscheiden. *J. Meixner (Gießen).*

**Magnan, Claude: Sur la cassure des noyaux d'éléments plus légers que l'uranium, sous le bombardement des neutrons.** *C. R. Acad. Sci., Paris 208, 742—744 (1939).*

Der Versuch, eine durch Neutronen hervorgerufene Atomkernspaltung bei leichteren Elementen nachzuweisen, war negativ bei Bi, Ta, Te, Cd, Ag, Pd, Mo, Zr, Sr. Dagegen gaben Au, W, Ti positives Resultat; die Energie der Kerntümmer wird angegeben. *Bechert.*

**Wentzel, G.: The angular spread of hard cosmic-ray showers.** *Phys. Rev., II. s. 54, 869—872 (1938).*

„Harte“ Schauer, von denen angenommen wird, daß sie von Mesotronen erzeugt werden und Mesotronen enthalten, zeigen eine geringere Winkeldivergenz, als man nach einer Abschätzung der Energie der primären Mesotronen erwarten könnte. Man kann die Theorie dieser Erfahrung anpassen, wenn man die hohen Impulse in einer Weise abschneidet, die der Einführung eines „Formfaktors“ für das am Stoß beteiligte schwere Teilchen entspricht. *C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).*

**Vallarta, M. S., C. Graef and S. Kusaka: Galactic rotation and the intensity of cosmic radiation at the geomagnetic equator.** *Phys. Rev., II. s. 55, 1—5 (1939).*

Wenn die Höhenstrahlung außerhalb unseres Milchstraßensystems entsteht, ist wegen der Rotation des Milchstraßensystems nach Compton und Gettings (vgl. dies. Zbl. 12, 239) eine schwache Abhängigkeit ihrer Intensität von der Sternzeit zu erwarten. Die Größe dieses Effekts wird durch das Magnetfeld der Erde beeinflusst. Die Verff. berechnen diesen Einfluß für Teilchen, die in der Ebene des geomagnetischen

Äquators laufen, als Funktion des Energiespektrums der primären Teilchen. Die gesamte zu erwartende Intensitätsschwankung ist von der Größenordnung 0,1%.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Gamow, G.: The energy-producing reaction in the sun. *Astrophys. J.* 89, 130—133 (1939).

Die beiden heute vor allem als Energiequellen der normalen Sterne in Betracht kommenden Kernreaktionen ( $H^1 + H^1 = D^2 + e^+$  und  $C^{12} + 4 H^1 = C^{12} + He^4 + 2 e^+$ , letzteres in 6 Schritten ausgeführt) ergeben wegen der verschiedenen Ladung der beteiligten Kerne eine verschiedene Temperaturabhängigkeit der Energieerzeugung und damit eine verschiedene Abhängigkeit des Radius (und damit der Oberflächentemperatur) eines Sterns von seiner Masse. Der Vergleich mit der Erfahrung spricht eindeutig für die Kohlenstoffreaktion.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

## Relativitätstheorie.

Vogtherr, K.: Über den Einfluß der Massen auf die Lichtfortpflanzung. *Astron. Nachr.* 268, 277—290 (1939).

Verf. schlägt eine Formel vor, welche den Einfluß der Bewegung von Massen auf den „Bewegungszustand des Äthers“ darstellen soll.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Freud, Ph.: Über die Ausdrücke der Gesamtenergie und des Gesamtimpulses eines materiellen Systems in der allgemeinen Relativitätstheorie. *Ann. of Math.*, II. s. 40, 417—419 (1939).

The author remarks that in general relativity a detailed argument is needed to show that the total energy and momentum of a material system are independent of changes of coordinates, but that the independence is obvious if momentum and energy can be expressed as a flux across the bounding surface of the spatial region considered. He shows that this is always possible. The total energy and momentum are known to be given by  $\mathfrak{S}_k = \int \mathfrak{U}_k^i dv$ , where  $dv$  is the spatial volume-element and  $\mathfrak{U}_k^i = \mathfrak{T}_k^i + t_k^i$ ,

( $\mathfrak{T}_k^i$  the momentum-energy tensor-density and  $t_k^i$  the pseudo-tensor-density of potential energy). The main part of the paper is devoted to showing that  $\mathfrak{U}_k^i$  can be expressed in the form  $\mathfrak{U}_k^i = \partial \mathfrak{V}_k^i / \partial x^v$  (\*) where  $\mathfrak{V}_k^i$  is skew in  $i, v$  and is determined as a function of the Christoffel symbols and of the metric tensor-density  $g^{\mu\nu}$ . From this the desired flux-formula  $\mathfrak{S}_k = \int_S \mathfrak{U}_k^i dS_{(\alpha)}$  is immediately obtained,  $dS_{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) being

surface elements. [Formula (\*) may be proved equivalent to one given by Tolman, *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, p. 229 (89.3). Tolman's function  $\mathfrak{V}_k^i$  is not however identical with the author's, but differs from it by terms whose  $x^v$ -derivative is zero. Ref.]

H. S. Ruse (Southampton).

Hönl H., und A. Papapetrou: Über die Selbstenergie und das Gravitationsfeld einer elektrischen Punktladung. *Z. Physik* 112, 65—85 (1939).

Die Verff. untersuchen kugelsymmetrische statische Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen. Als Linienelement setzen sie an:  $ds^2 = F(r)c^2 dt^2 - G(r)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(r)(xdx + ydy + zdz)^2$ ; die sonst übliche Festsetzung  $G \equiv 1$ , die mit der Invarianz gegenüber Maßstabsänderungen begründet wird, verwerfen sie, weil die bei  $r = 0$  vorausgesetzte Singularität der Funktionen der Meßskala einen natürlichen Anfangspunkt setzt; sie lassen also  $G$  beliebig. Dagegen fordern sie von den Funktionen  $F, G, H$ , daß  $ds^2$  für  $r \rightarrow \infty$  in die Galileische Form übergeht. Als Materietensor  $T_{\mu\nu}$  verwenden sie den Spannungstensor der Maxwell'schen Feldgleichungen; da die gesuchte Lösung einer ruhenden Punktladung entsprechen soll, ist nur das skalare Potential  $\Phi_4$  von Null verschieden, der Viererstrom ist überall Null, außer bei  $r = 0$ . Es ergibt sich:  $-\partial \Phi_4 / \partial r = \varepsilon / 4\pi \cdot 1 / (Gr)^2$ ; daraus läßt sich der Tensor  $T_{\mu\nu}$  berechnen und die Gravitationsgleichungen anschreiben. Die Lösung ist:  $F = 1 - \alpha/R + \kappa e^2 / (8\pi R^2)$ ,  $G = (R/r)^2$ ,  $H = (r^2 / (R^2 F) - G^2) \cdot 1 / R^2$ ,  $R = (r^3 + \varrho^3)^{1/3}$ ,  $\Phi_4(R) = \varepsilon / (4\pi R)$ ;



$\kappa = 8\pi k/c^4$ , wo  $k$  die Newtonsche Gravitationskonstante ist;  $\rho, \alpha, e, \varepsilon$  sind Integrationskonstanten, und es ist:  $e = \varepsilon/\sqrt{4\pi}$ ;  $e$  ist also die Ladung des Massenpunkts,  $\alpha$  hängt mit der Masse  $M$  desselben zusammen gemäß:  $\alpha = \kappa M c^2/(4\pi)$ ;  $\rho$  hat die Dimension einer Länge. Die Gesamtenergie der Punktladung wird  $E = e^2/(2\rho)$ , die Verff. setzen sie gleich  $M c^2$ , was die Annahme einer rein elektromagnetischen Masse bedeutet.  $F$  läßt sich umschreiben in:  $F = 1 - \kappa c^2/(4\pi R) \cdot (M - M_a)$ , wo  $M_a c^2$  die außerhalb einer Kugel vom Radius  $R$  vorhandene (elektrostatische) Energie ist.  $F$  hat als Funktion von  $r$  ein Minimum:  $1 - \kappa e^2/(32\pi \rho^2)$ . Da  $F$  nicht negativ werden darf, erhält man eine untere Grenze  $\rho_0$  für  $\rho$ :  $\rho_0 = e\sqrt{k}/(2c^2) = 6,8 \cdot 10^{-34}$  cm. Die zugehörige Masse  $M$ , die zugleich die nach diesem Modell größtmögliche Masse einer Punktladung ist, ergibt sich zu:  $e/\sqrt{k} = 1,85 \cdot 10^{-6}$  g. — Physikalisch zugänglich ist nur der Raum  $R > \rho$ . — Der Vergleich mit den Ergebnissen der nichtlinearen Elektrodynamik von Born zeigt qualitative Ähnlichkeiten. Bechert (Gießen).

**Sulaiman, S. M.:** *Levi-Civita's formulae for two bodies.* Proc. Nat. Inst. Sci. India 4, 337—340 (1938).

Kritik der Arbeit von Levi-Civita [Amer. J. Math. 59, 225—234 (1937); dies. Zbl. 16, 282]. Heckmann (Göttingen).

**McCrea, W. H.:** *Observable relations in relativistic cosmology. II.* Z. Astrophys. 18, 98—115 (1939).

In the first paper under the same title, written in 1935 (this Zbl. 11, 41), the author obtained relations between observable quantities (Doppler shifts, numbers of nebulae, etc.) for the expanding universe. Recent observations have shown, however, that the assumption made in current expanding-universe theories that the universe is isotropic and homogeneous is probably not satisfied by the actual universe, and the author therefore seeks the type of relation that must hold between observable quantities if the assumption is not made but if general relativity as a whole is retained. He first argues in a general way that Hubble's law, or something very similar, must hold to a first approximation whatever the distribution of matter, and then calculates, on the usual assumption that the nebulae may be treated as a smoothed-out fluid, the Doppler shift  $\sigma$  corresponding to any fixed direction of observation in the most general space-time  $ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q$ . That  $\sigma$  is proportional in the first approximation to the distance proves to be an almost trivial kinematical result. ["Distance" is taken to be "projected length" as defined by Ruse (this Zbl. 4, 424; 6, 375), Kermack-McCrea-Whittaker (this Zbl. 6, 224) and Temple (this Zbl. 19, 380).] In order to relate the recession of nebulae to the distribution of matter it is therefore necessary to proceed to a second approximation. To do this the author assumes for simplicity that the metric in our neighbourhood is reducible to the form

$$ds^2 = (dx^4)^2 + \sum_I^3 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

a partial justification being given for this assumption, and then shows how in the second approximation the dependence of the apparent recession on distance can in fact be related to the mean density in our neighbourhood whether or not the distribution is homogeneous or isotropic. He further discusses, but does not completely solve, the problem of expressing this relation in terms of astronomically observable quantities, and concludes with an appendix on astronomical distance. H. S. Ruse (Southampton).

## Astrophysik.

**Chapman, S.:** *The atmospheric height distribution of band-absorbed solar radiation.* Proc. phys. Soc. Lond. 51, 93—109 (1939).

Die Arbeit ist eine Fortführung früherer Untersuchungen des Verf. über die Absorption der Sonnenstrahlung in der Erdatmosphäre [Proc. Physic. Soc. London 43,

26—45 u. 483—501 (1931); dies. Zbl. 1, 188 u. 3, 44]. — Es wird die Bandenabsorption der unter dem Zenitwinkel  $\chi$  einfallenden Strahlung in Abhängigkeit von der Höhe in der Atmosphäre betrachtet, wenn die Relation zwischen dem Absorptionskoeffizienten  $\alpha$  und der Wellenlänge  $\lambda$  die Form der Fehlerfunktion hat und die Intensität der extraterrestrischen Sonnenstrahlung über den Bandenbereich konstant ist oder linear variiert. Dabei werden zunächst keine Annahmen gemacht über die Höhenverteilung des absorbierenden Gases. — Der Verf. diskutiert dann die allgemeinen Resultate in dem Spezialfall exponentieller Abnahme der Gasdichte ( $\rho = \rho_0 \cdot e^{-h/H}$ ). — In diesem Fall erfolgt, unabhängig von dem Winkel  $\chi$ , maximale Volumabsorption in einer Schicht, die um  $0,616 H$  unterhalb der Schicht maximaler monochromatischer Absorption im Zentrum der Bande liegt. — Die Energie, welche von der Volumeneinheit maximal absorbiert wird, nimmt wie bei monochromatischer Absorption ab mit  $\cos \chi$ . — Bemerkenswert ist ferner, daß bis zum Niveau maximaler Bandenabsorption herab die Absorptionsverhältnisse die gleichen sind wie bei monochromatischer Absorption, während darunter sich Abweichungen ergeben. *S. Baumbach* (Kiel).

**Bradley, A. J.: Structure of meteorites.** *Nature*, Lond. 143, 518—519 (1939).

The author shows how his recent laboratory results on the structure of nickel-iron alloys, which were subjected to various heat treatments, give information about the duration and intensity of the heating which must have been experienced by meteorites in order to produce their characteristic structure. *W. H. McCrea* (Belfast).

**Fessenkoff, B.: Les météores cosmiques et la lumière zodiacale.** *Astron. J. Soviet Union* 15, 358—366 u. franz. Zusammenfassung 367 (1938) [Russisch].

Verf. untersucht die komplizierte Struktur des Zodiakallichtes, dessen Lichtstreuung die freien, von der Sonne ununterbrochen ausgestrahlten Elektronen, die elliptischen, dem Sonnensystem angehörenden Meteore und der aus dem Weltraum eindringende meteoritische Staub, verursachen. Nach M. Öpik bewegen sich die meisten beobachteten Meteore mit hyperbolischen Geschwindigkeiten. Ihre Anzahl nimmt mit Abnahme der Helligkeit schnell zu, man kann deshalb erwarten, daß unser Planetensystem von einer großen Menge kosmischen Staubs erfüllt ist. Verf. untersucht einen homogenen Meteoritenstrom, dessen Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit ursprünglich in derselben Richtung sich bewegen. Es wird der störende Einfluß der Sonne berechnet und daraus die Dichteverteilung in verschiedenen Punkten des Raumes als Funktion der Polarkoordinaten  $r$  und  $\vartheta$ , mit dem Ursprung in der Sonne und der Achse nach dem Vektor  $v_0$  orientiert. Die Flächen der gleichen Dichte sind Rotationsflächen in bezug auf dieselbe Achse. Für verschiedene Punkte der Erdbahn berechnet der Verf. die Intensitätsverteilung im Zodiakallicht. Es zeigt sich, daß die Verteilung fast die gleiche ist in beiden Zweigen, aber daß der absolute Glanz verschieden ist, was durch entsprechende Beobachtungen bestätigt werden kann. *Slouka* (Prag).

**Fessenkoff, B.: Quelques considérations sur l'origine de la lumière zodiacale.** *Astron. J. Soviet Union* 15, 368—376 (1938).

Verf. setzt voraus, daß das Zodiakallicht durch Diffusion der Sonnenstrahlen an kleinen Teilchen, die den Raum erfüllen, entsteht. Diese können folgenden Ursprungs sein: 1. freie, von der Sonne ausgestrahlte Elektronen, 2. meteoritische Massenteilchen, welche elliptische Bahnen beschreiben, 3. meteoritische Massenteilchen, welche aus dem Weltraum in hyperbolischen Bahnen in das Planetensystem eindringen. Es wird versucht, die Frage nach der Dichteverteilung in der Elektronenwolke, die die Sonne umgibt, zu beantworten. Verf. berechnet, daß in der Gegend des Weltraumes, in der das Zodiakallicht entsteht, die Dichte viel schneller abnimmt als der reziproke Wert der Entfernung von der Sonne. Die Mehrzahl der in Betracht kommenden Teilchen muß außerhalb der Planetenbahn liegen. Es ergibt sich also: 1. Die Massenverteilung der Meteoritenteilchen, welche weit von der Sonne entfernt entstehen, hat die Form einer sehr abgeplatteten Scheibe, in deren Symmetrieebene die Dichte langsamer sich ändert als  $r^{-1}$ . 2. Die Massenverteilung von Teilchen im Innern des Sonnensystems ist viel weniger abgeplattet und kann mit einem Rotationsellipsoid verglichen werden,



in dessen Symmetrieebene die Dichte schneller als  $r^{-1}$  sich ändert. 3. Die Massenverteilung von Teilchen, deren Ursprung in der Sonne zu suchen ist, wird durch konzentrische Kugeln dargestellt, und die Dichte ändert sich wie  $r^{-2}$ . *Slouka (Prag).*

**Struve, Otto:** The physical state of the interstellar gas clouds. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 36—43 (1939).

Es wird ein Versuch unternommen, den großen Unterschied zwischen den theoretischen Resultaten der Arbeiten von Eddington, Gerasimovič und Struve, welche den Ionisationszustand des interstellaren Gases als sehr hoch ansehen und den Beobachtungsergebnissen, die diesen Resultaten widersprechen, eingehend zu untersuchen und zu erklären. Verf. setzt voraus, daß der Ionisationsgrad viel kleiner ist und versucht eine neue, verbesserte Theorie aufzubauen. Den wichtigsten Unterschied bildet die Annahme des Verf., nach welcher  $\text{Ca}^+$ ,  $\text{Ca}^{++}$  und  $\text{Na}^+$  nur einen verschwindenden Teil der notwendigen freien Elektronen beitragen, während Gerasimovič und S. annehmen, daß alle Elemente gleich mächtig in der Erzeugung von freien Elektronen sind. Aus eigenen und Elveys Beobachtungen findet der Verf., daß aus 35 Gebieten in der Milchstraße 22 die Emissionslinie  $\text{H}_\alpha$  zeigen, manche auch noch  $\text{H}_\beta$  und  $[\text{O II}] 3727$ , wenige aber  $\text{N}_1$  und  $\text{N}_2$ . Verf. betrachtet die ultraviolette Strahlung der Sterne als das wichtigste Anregungsmittel, das die starken Emissionslinien erzeugt, und das bis zu einer Entfernung von 100 oder noch mehr Parsec wirksam sein kann. Das wichtigste Resultat dieser Untersuchung sieht der Verf. in dem unerwartet großen Überschuß von H; das Verhältnis H : Ca wird auf  $10^8$  geschätzt. In ungefähr demselben Verhältnis befindet sich H zu Na. Da die ganze Masse des interstellaren Gases praktisch nur aus H-Atomen besteht, findet der Verf. für ihre Dichte ungefähr  $\rho = 3 \times 10^{-25} \text{ g/cm}^3$ . *Slouka (Prag).*

**Kreiken, E. A.:** On the general aspect of the Milky-Way. Z. Astrophys. 17, 170—181 (1939).

Verf. beruft sich auf seine Untersuchungen über den Einfluß der kosmischen Wolken auf die scheinbare Oberflächenhelligkeit der Milchstraße [Z. Astrophys. 12, 5 (1936)]. An Hand dieser Resultate konstruiert er Tafeln für die Koeffizienten der interstellaren Absorption, und bemerkt, daß im Falle einer gleichförmigen Raumverteilung der kosmischen Wolken in der galaktischen Ebene, die scheinbare Verteilung der verdunkelten Gebiete nicht gleichförmig sein wird. In der Richtung des galaktischen Zentrums wird eine ansehnliche Konzentration von dunklen Wolken beobachtet und die scheinbare Oberflächenstruktur der Milchstraße wird sehr kompliziert sein. In dieser Richtung wird auch die Anzahl der kosmischen Dunkelwolken so groß sein, daß die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von „galaktischen Fenstern“ klein ist. Die Tatsache, daß einige kosmische Dunkelwolken in mittleren galaktischen Breiten beobachtet wurden, bestätigt, daß man in der Milchstraßenebene eine besonders große Anzahl von diesen Gebilden erwarten muß, obwohl viele von diesen klein und lichtschwach sein werden. Ihre große Anzahl berechtigt daher zur Annahme, daß die Absorption im interstellaren Raum von der vereinigten Absorption der sich scheinbar überdeckenden Wolken herrührt. *Slouka (Prag).*

**Becker, Wilhelm:** Bestimmung absoluter Helligkeiten von O-Sternen aus der interstellaren Verfärbung. Z. Astrophys. 18, 94—97 (1939).

Vorliegende Untersuchung knüpft an eine frühere Arbeit des Verf. an, in der an dem Verhalten von Doppelsternen und Sternpaaren gezeigt wurde, daß die bei Sternen frühen Spektraltypus vielfach zu beobachtenden Verfärbungen fast ausschließlich interstellaren Ursprungs sind. Man kann also den Entfernungseffekt in den Farbenexzessen zur Bestimmung absoluter Helligkeiten von Einzelobjekten benutzen. Es muß nur der Entfernungseffekt für die Richtung, in welcher ein solches Objekt sich befindet, bekannt sein und er muß die Form eines monotonen Anwachsens der Verfärbung über einen Entfernungsbereich haben, der die Entfernung des zu untersuchenden Objekts einschließt. Dazu ist noch notwendig, daß sein Normalfarbenindex bekannt sei. Verf. untersucht die lichtelektrischen Farbenindizes und Farbenexzesse von O- und B-Sternen aus dem Katalog von Stebbins und Huffer und bestimmt ihren Entfernungsmodul  $m - M$ . Aus diesen folgt die mittlere absolute Helligkeit der O-Sterne  $-3^m 52 \pm 0^m 13$ . *Slouka (Prag).*

**Miyamoto, Shōtarō:** On the Balmer emission of the planetary nebulae. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* **21**, 173—202 (1938).

Verf. formuliert eine allgemeine Theorie der Stoßanregung von normalen Wasserstoffatomen durch Elektronen. Es wird der Emissionsmechanismus der Balmerlinien untersucht, aus der abgeänderten Ionisationsformel ergibt sich ein etwas verschiedener Ionisationsgrad des Nebelzustandes. Die Cilliésche Formel für das Balmerdekrement wird verbessert, und mit ihrer Hilfe werden die Balmerdekremente für Planetarnebelmodelle abgeleitet. Die theoretischen Resultate stimmen mit den Beobachtungsergebnissen überein. Das Balmerdekrement ist eng mit der Elektronentemperatur verbunden, die es bestimmt. Die Zanstrache und Stoysche Methode der Bestimmung der Kerntemperatur wird verbessert und auf N.G.C. 7662 angewandt. In einem eigenen Kapitel wird die Erregung eines normalen Wasserstoffatoms durch Stoß langsamer Elektronen wellenmechanisch untersucht und numerisch behandelt. *Slouka.*

**Beutler, H.:** Influence of pressure and temperature upon the absorption and fluorescence of spectral lines. *Astrophys. J.* **89**, 294 (1939).

Kurze Übersicht über Arbeiten, welche den Einfluß verschiedener Phänomene, wie z. B. Stoßdämpfung, große Drucke u. a. m., auf die Breite und Gestalt von Spektrallinien ausüben, sowie Betrachtungen über die Wirkung von Druck und Temperatur auf die Absorption und Fluoreszenz von Spektrallinien. Auf die quantitative Behandlung dieser Effekte an beiden Na-Linien, die Adel, Ladenburg und Slipher zur Bestimmung des Natriumgehaltes in Kometenschweiften führten, wird hingewiesen. *Slouka (Prag).*

**Wellmann, Peter:** Eine einfache Konstruktion rotationsverbreiterter Linien. *Z. Astrophys.* **18**, 142—145 (1939).

Carroll (this Zbl. **7**, 133) has given a method for calculating the contour of a stellar absorption line broadened by rotation of the star. The computational work is heavy, and Unsöld (Physik der Sternatmosphären; this Zbl. **18**, 284) has given a semi-graphical method, which reduces the labour, but which is applicable only if the rotation-width does not exceed by much the undisturbed half width. The author shows how an extension of Unsöld's method can be applied to much greater rotational broadening. He gives some examples showing the good agreement of the method with the results of more elaborate computations. *W. H. McCrea (Belfast).*

**Page, T. L.:** The continuous atomic absorption of light. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **99**, 385—396 (1939).

This is a review of the present position in regard to the correspondence between laboratory observations and theoretical predictions of the atomic coefficient of continuous absorption. The simple Kramers formula agrees with observation only for hydrogen, and ions consisting of a single electron outside a tightly-packed core, and for short X-rays, and also approximately for highly excited atoms, as should be expected from the theory. Other theoretical formulae succeed in giving the correct order of magnitude of the absorption coefficient, but appear to fail in certain details of its variation with frequency, for ground states of alkali elements. Theoretical predictions are not available for other types of atom. It appears that the free use of Kramers's formula in astrophysics is not justifiable. *W. H. McCrea (Belfast).*

**Franck, James, and Carol Anger Rieke:** Note on the explanation of the D-lines in the spectrum of the night sky. *Astrophys. J.* **89**, 463—464 (1939).

The D-lines of sodium have, as is well known, been observed in the spectrum of the night sky. The most probable source of sodium seems to be the evaporation of NaCl from sea water, but the mechanism of dissociation of the NaCl molecules at the great heights involved appears to be doubtful at the present stage of development. The authors point out, that the resonance lines of the alkalis are observed in the laboratory when alkali halides are irradiated with ultraviolet light, the process responsible for the effect being a photodissociation into a normal halogen and an excited alkali atom. The D-lines are observed in emission though free sodium atoms are not present in an amount which would give observable absorption. At night dissociation could



be attributed to electron impacts. Finally the authors point out that in the absorption process considered there is an excess of energy, which as kinetic energy would cause line broadening; a determination of the width of the *D*-lines in the sunlit evening or dawn sky would therefore be of importance as giving information on the region of absorption of sunlight for this process. *Steensholt* (Kopenhagen).

**Grotian, W.:** *Zur Frage der Deutung der Linien im Spektrum der Sonnenkorona.* Naturwiss. 27, 214 (1939).

The author discusses the question whether the corona lines can be interpreted as forbidden lines of very highly ionized atoms. In particular, by studying some experimental data due to Edlén, he is led to interpret the red corona line  $\lambda 6374,51$  as a  $3p^2P_2 - 3p^2P_1$  transition in the Fe X spectrum. *Steensholt* (Kopenhagen).

**Wurm, K.:** *On the interpretation of the spectra of comets and their forms.* Astrophys. J. 89, 312—319 (1939).

The author gives, in the first part of his paper, a description of the most outstanding features concerning luminosity, spectroscopic characteristics and variations of the shape of comets, and in particular the distribution of the various emitting molecules over the different parts of the comets. The explanation of the luminosity of comets as a fluorescence phenomenon is then discussed, and the arguments which reveal the existence of a very low particle density in the atmospheres of comets, are critically reviewed. It is shown that collisions play no rôle at all. Finally it is shown how the local distributions of molecules and the contraction effect can be explained by means of the processes of ionization and dissociation by light absorption. In an addendum the author criticises a recent paper by Swings and Nicolet, who have put forward an alternative explanation for the variation of the intensity distribution within the band systems in their dependence upon the solar distance. It is found that their conclusions are probably invalid. *Steensholt* (Kopenhagen).

**Biermann, L., und O. Hachenberg:** *Über das Spektrum von  $\zeta$  Tauri.* Z. Astrophys. 18, 89—93 (1939).

In the spectrum of  $\zeta$  Tauri the helium lines are of a very flat structure, due to rotational broadening. Only lines originating in metastable levels have a sharp and welldefined core. This phenomenon was found and interpreted by Struve and Wurm in a study of the line  $\lambda 3965$ . The present authors extend the study to the lines  $\lambda 5016$  and  $\lambda 3889$ , which are found to behave in the same way. *Steensholt*.

**Minkowski, R.:** *The spectra of the supernovae in IC 4182 and in NGC 1003.* Astrophys. J. 89, 156—217 (1939).

The author presents the results of a thorough spectrographic investigation of the two supernovae mentioned in the title of the paper. A comparison of the results with those obtained for earlier supernovae for which spectroscopic observations are available, shows that the spectra of all supernovae are practically identical in their composition and transformations. If the bands are ordinary emission lines, the red shift can hardly be explained as due to a Doppler effect caused by an outward flow of matter. If one accepts an explanation of the red shift as due to an increase in the gravitational potential at the surface of the star (in accordance with Zwicky's hypothesis of a collapse of the star) one is led to assume that the bands are negative absorption lines formed by induced transitions in a forbidden line of a highly ionized atom; this assumption permits an interpretation of the red shift as due to a Doppler effect. It is found that two bands in the red may be interpreted as the O-lines  $\lambda 6300$  and  $\lambda 6364$ , but all other identifications are uncertain. Hydrogen and helium lines are absent, which indicates a very high degree of ionization. All the bands may therefore be of unknown origin. *Steensholt* (Kopenhagen).

**Vogt, H.:** *Zur Deutung der Gestalt der Spiralnebel.* Astron. Nachr. 268, 291—292 (1939).

The author criticises a theory of the form of arms of a spiral nebula put forward by Bucerius (this Zbl. 19, 288), chiefly in regard to difficulties connected with his

proposed origin of the velocities of the material of the arms in a tidal disturbance due to a second nebula. He refers to his own earlier work (this Zbl. 6, 36; 12, 283).

W. H. McCrea (Belfast).

**Shapley, Harlow:** The distribution of eighty-nine thousand galaxies over the south galactic cap. Harvard Coll. Observat., Circ. Nr 423, 1—11 (1937).

Die Verteilung von fast 90000 außergalaktischen Nebeln in der Umgebung des Südpols der Milchstraße, der als praktisch frei von unregelmäßigen galaktischen Absorptionen angenommen wird, zeigt ziemlich starke Abweichungen von der Gleichförmigkeit. Die Nebelhäufigkeit nimmt sogar von  $-55^\circ$  gal. Br. bis zum Pol im Mittel ab, wofür allerdings ein Quadrant besonders verantwortlich ist. Weitere Studien der Gegend sind in Arbeit.

Heckmann (Göttingen).

**Brill, Alfred:** Die isophote und die effektive Wellenlänge in der Photometrie der Integralhelligkeiten, die isoplene und die effektive absolute Helligkeit in der Stellarstatistik. Z. Astrophys. 15, 137—142 (1938).

Die vom Verf. eingeführte isophote Wellenlänge  $\lambda_\phi$  von Integralhelligkeiten gemäß der Definitionsgleichung

$$\int_0^\infty 10^{-0,4m_\lambda} \cdot v(\lambda) d\lambda = 10^{-0,4m_\lambda\phi} \int_0^\infty v(\lambda) d\lambda$$

[ $m_\lambda$  = spektrale Intensität in Größenklassen,  $v(\lambda)$  = Verzerrungsfunktion des photometrischen Systems] ist grundsätzlich zu unterscheiden von der effektiven Wellenlänge

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\int_0^\infty \lambda \cdot S(10^{-0,4m_\lambda} \cdot v(\lambda)) d\lambda}{\int_0^\infty S(10^{-0,4m_\lambda} \cdot v(\lambda)) d\lambda} \quad (S = \text{Schwärzung}); \text{ nur bei}$$

schmalem wirksamen Spektralbereich können isophote und effektive Wellenlänge genähert identifiziert werden. Formal ganz analog sind in der Stellarstatistik die Begriffe isoplene und effektive absolute Helligkeit definiert; den Integralhelligkeiten entsprechen die reduzierten Sternzahlen, der photometrischen Verzerrungsfunktion die Leuchtkraftverteilung und der spektralen Intensitätsverteilung die räumliche Dichtefunktion. Wegen der großen Streuung der Leuchtkräfte sind isophote und effektive absolute Helligkeit auch praktisch merklich verschieden.

Wempe (Jena).

**Mineur, Henri:** L'équilibre statistique des amas d'étoiles à trois axes inégaux. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 775—777 (1938).

Auf die Sterne eines dreiachsigen galaktischen Haufens, der sich im statistischen Gleichgewicht befinden soll, wirken das Milchstraßenpotential und das Eigenpotential des Haufens. Die Reihenentwicklung des ersteren nach den vom Haufenmittelpunkt aus gezählten Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  wird in der Form  $U_1 = -\frac{1}{2} n^2 [(\xi + R_0)^2 + \eta^2] - \frac{1}{2} \alpha \xi^2 - \frac{1}{2} \alpha' \zeta^2$  angesetzt, wobei in diesem Zusammenhang vor allem die Konstanten  $\alpha$  und  $\alpha'$  interessieren. Das Eigenpotential wird als Potential eines homogenen Ellipsoids angesetzt. Daraus gewinnt der Verf. Beziehungen zwischen den Achsenverhältnissen und den Konstanten  $\alpha$  und  $\alpha'$ , die er in verschiedener Richtung auswertet.

Straßl (Göttingen).

**Shapley, Harlow:** A determination of the distance to the galactic center. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 113—118 (1939).

Photographische Untersuchungen des Feldes MWF 269 mit der Mitte in  $18^h 20^m$ ,  $-55^\circ$  (1900) von einer Größe von 80 Quadratgraden ermöglichen dem Verf. eine neue Bestimmung der Größe des Milchstraßensystems und insbesondere der Entfernung der galaktischen Mitte in den Sagittariuswolken. Mehr als 600 Galaxien und über 500 Veränderliche wurden untersucht. Von den Veränderlichen ist mehr als die Hälfte vom Cepheidtypus. Die Grenzgröße der untersuchten Objekte ist 16,5. Mit Hilfe der maximalen Häufigkeit der fotografierten Galaxien und der ermittelten Dichtefunktion für Veränderliche in der Nähe des galaktischen Zentrums ergibt sich seine Entfernung zu

$$r_c = 9,7 \pm 1,2 \text{ (m. F.) Kiloparsec.}$$

Slouka (Prag).



**Joy, Alfred H.:** Rotation effects, interstellar absorption and certain dynamical constants of the galaxy determined from cepheid variables. *Astrophys. J.* 89, 356—376 (1939).

Aus den vom Verf. abgeleiteten Radialgeschwindigkeiten von 156  $\delta$ -Cepheiden wird unter Annahme der üblichen Werte für die Apexbewegung der Rotationseffekt nach dem Oortschen Ansatz für 4 Entfernungsgruppen berechnet. Um eine lineare Zunahme der Amplitude mit der Entfernung zu erreichen, muß bei den photometrisch bestimmten Entfernungen die Wirkung der interstellaren Absorption berücksichtigt werden; durch Versuche wird die beste Darstellung für den Absorptionsbetrag  $0^m,85$  auf 1000 Parsecs gefunden. Die Entfernung zum Zentrum wird nach einem Vorschlag von Trumpler [vgl. Ph. Hayford, *Lick Observ. Bull.* 16, 53—75 (1932)] aus der Lage der Nullstellen der Radialgeschwindigkeit zu 10000 Parsecs abgeschätzt. Daraus ergibt sich die Umlaufzeit der Sonne zu  $2,07 \cdot 10^8$  Jahren. *Wempe* (Jena).

**Dufay, Jean, et David Smoukovich:** La densité optique de la voûte lactée dans une direction perpendiculaire au plan galactique déduite des dénombrements d'étoiles. *C. R. Acad. Sci., Paris* 208, 1204—1207 (1939).

Unter der Annahme, daß die Sterne sich gleichförmig in einer planparallelen galaktischen Schicht der Dicke  $h$  verteilen, in der eine homogene Absorption des Lichts (Absorptionskoeffizient  $K$ ) stattfindet, wird die Gesamthelligkeit der Sterne in Abhängigkeit von der galaktischen Breite ( $b$ ):  $B(b) = \frac{I_0}{K} \left( 1 - e^{-\frac{K \cdot h}{2} \operatorname{cosec} b} \right)$ . Eine etwas bessere Darstellung der beobachteten Sternzahlen wird durch die Einführung eines Parameters  $A$  in der Form  $B(b) = \frac{I_0}{K} \left( A - e^{-\frac{K \cdot h}{2} \operatorname{cosec} b} \right)$  erreicht. Es ergibt sich  $A = 0,91$  und die optische Dicke der Absorptionsschicht zu  $0^m,54$ . Die Abweichung der Größe  $A$  von 1 läßt sich entweder durch eine stärkere Absorption oder durch eine geringere Sterndichte in der Umgebung der Sonne deuten; die Verff. halten die zweite Möglichkeit für wahrscheinlicher. *Wempe* (Jena).

**Lall, P. Samuels:** The „southern stream“ and the  $K$  term. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 99, 42—48 (1938).

This work arises mainly from recent investigations of Plaskett and Pearce [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 94, 679 (1934)] and subsequent criticisms of it by various writers. The author finds that published studies of radial velocities, which make no assumption about the position of the solar apex, yield a mean value of  $K$  equal to 4,2 km/sec. The Einstein shift for  $B$ -stars is taken as 1,4 km/sec, but he finds that if  $K$  is put equal to this value it leads to no correspondence between the radial-velocity convergents and the proper-motion convergents.  $K = 4,2$  gives good agreement for Kapteyn's proper-motion convergent ( $C_K$ ) but not for Plaskett's ( $C_P$ ). However the author finds a value of  $K$  equal to 7,2 km/sec for the southern stream, and he suggests using this as a „local value“ of  $K$ . He finds that this gives a very good fit for the mean of  $C_K$  and  $C_P$ , which he accepts as the correct position of the convergent, and which he notes is coincident with the solar vertex. He considers that the value  $K = 4,2$  may be retained as a value of  $K$  for the whole sky. *McCrea*.

**Nekrasowa, S.:** On the calculation of elements of eclipsing binaries. *Astron. J. Soviet Union* 15, 577—383 u. engl. Zusammenfassung 382—383 (1938) [Russisch].

Es werden die Russell-Kratsche und die Fethaar-Pietrowskische Methode zur Berechnung der Elemente von Bedeckungsveränderlichen verglichen und ihre Vor- und Nachteile hervorgehoben. Verf. berechnet die Elemente der Systeme SW Oph und RW Ara, wobei er zeigt, daß die Russell-Kratsche Methode praktischer und genauer ist.

*Slouka* (Prag).

**Kopal, Zdeněk:** The reflection effect in eclipsing binary systems. *Astrophys. J.* 89, 323—332 (1939).

In the first part of the paper the author discusses the magnitude of the reflection effect in full phase, and points out that the discrepancies between observation and



Eddington's theory are due to the neglect of bolometric corrections. The deviations give the possibility of determining the temperature of the reflecting layer. The second part of the paper discusses the variation of the reflection with phase; in particular the effect of reflection on the apparent ellipticity constant is studied by means of formulae by Milne and Pike; the author finds that in general the correction term is positive and proportional to the sum of light reflected by both components. *Steensholt*.

**Sen, N. R.:** On some pressure relations in the interior of stellar bodies. *Z. Astrophys.* 18, 124—131 (1939).

Using the property that the quantity  $(P_c - P_r)/M_r^{2/3}$  ( $P_c$  = central pressure,  $P_r$  = pressure at distance  $r$ ,  $M_r$  = mass of sphere of radius  $r$ ) is a monotone decreasing function if the mean density decreases outwards, the author obtains some pressure relations valid for the interior of a stellar body, thereby extending previous work of Milne and Chandrasekhar. *Steensholt* (Kopenhagen).

● **Meurers, Joseph:** Studien über die Entartung der Materie in den Sternen und Planeten. (Veröff. d. Univ.-Sternwarte zu Bonn. Hrsg. v. Arnold Kohlschütter. Nr. 33.) Berlin u. Bonn: Ferd. Dümmlers Verl. 1938. 28 S. u. 5 Fig.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Bedingungen für das Eintreten von Entartung der Materie im Sterninnern untersucht, und zwar allgemein ohne Beschränkung auf spezielle Modelle. Im zweiten Teil werden Gaskugeln untersucht, die dadurch charakterisiert sind, daß die Zustandsgleichung im Zentrum die Form  $p \sim \mu^{-n} \rho^n$  hat, wo  $p$ ,  $\mu$  und  $\rho$  Druck, Molekulargewicht und Dichte bezeichnen und  $n$  eine Konstante ist. Es wird allgemein gezeigt, daß eine Zustandsgleichung der erwähnten Form für gewisse Massenintervalle, deren Grenzen von  $n$  abhängen, ausgeschlossen ist. Im dritten Teil wird die Beziehung zwischen Masse und Radius für die Planeten diskutiert. Es wird vorausgesetzt, daß im Planetenzentrum die Materie nichtrelativistisch entartet ist und daß ein Zusammenhang zwischen dem Zentralwert des Molekulargewichts und der Masse besteht. Bei plausiblen Annahmen über die chemische Zusammensetzung läßt sich für  $p \sim \mu^{-1/2} \rho^{1/2}$  gute Übereinstimmung mit der beobachteten Beziehung zwischen Masse und Radius erreichen. *Bengt Strömberg* (Kopenhagen).

**Gamow, Georges:** L'évolution des étoiles du point de vue de la physique moderne. *Ann. Inst. H. Poincaré* 8, 193—211 (1938).

Bericht über die Theorie der Energieerzeugung durch Kernreaktionen und der „Neutronenkerne“ *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

**Critchfield, C. L., and G. Gamow:** The shell-source stellar model. *Astrophys. J.* 89, 244—254 (1939).

Gamow has previously indicated the possible importance for stellar energy-production of the resonance penetration of nuclei by protons, and has shown that in a star such processes would be effectively confined to a zone in which the temperature is near a certain preferred value (this *Zbl.* 18, 285). To gain some insight into the consequences of such an effect, the authors now investigate the properties of a schematised model in which the energy-generation is assumed to be entirely confined to a thin shell of material at distance  $R^*$  from the centre — “shell-source model”. Inside  $R^*$  the temperature and density are constant, while outside  $R^*$  conditions will be like those in the well-known “point-source” model. The authors show how to combine these zones so as to derive the required properties of their model. In particular they show that the evolution of such a model with decreasing hydrogen-content as exhibited in the Hertzsprung-Russell diagram is not essentially different from that of a point-source model, which must approximate to the behaviour of a star in which the energy-generation is due to ordinary (non-resonance) nuclear penetration. However, the shell-source model shows a weaker dependence of luminosity on mass than does the point source model, which is in qualitative agreement with the known behaviour of very heavy stars for which the point source model is already known to fail. *W. H. McCrea*.

**Bethe, H. A.:** Energy production in stars. *Phys. Rev.*, II. s. 55, 103 (1939).

Kurzer Bericht über eine Durchmusterung aller in Sternen möglichen Kernreaktionen. Als Energiequelle scheint vor allem der Zyklus  $C^{12} + H^1 = N^{13}$ ;  $N^{13} = C^{13} + e^+$ ;



$C^{13} + H^1 = N^{14}$ ;  $N^{14} + H^1 = O^{15}$ ;  $O^{15} = N^{15} + e^+$ ;  $N^{15} + H^1 = C^{12} + He^4$  zu wirken.  
*C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

**Sevin, Émile:** *Physique stellaire, essai de synthèse.* Bull. Astron., Paris 11, 233—312 (1938).

The author first outlines the current theory of stellar structure up to the stage at which the hydrogen content of the stars is derived. He then criticises this theory, firstly on the ground that the hydrogen content is found to be about the same in stars of widely different luminosities, whereas one might expect it to vary considerably if the hydrogen plays a part in the energy-production. Secondly, he alleges that current theory fails to take account of the conservation of momentum in its treatment of radiative equilibrium. He then recasts the theory, using the additional relation he has previously derived (this Zbl. 18, 432), and also his theory of energy generation by the annihilation of matter. The latter is supposed to depend upon a double process in which a pair of neutrons react to form a positron and a negative electron, which then mutually cancel each other. He further attempts to show that a white dwarf consists almost entirely of neutrons. The author gives details of the application of his theory to well-known stars. He then sketches his theory of stellar evolution, in which the successive stages of a star are a giant, a main sequence star, a stage intermediate between this and a white dwarf typified by Krueger 60 B and  $\alpha_2$  Eridani B, and finally a white dwarf. He concludes with certain speculations about the pre-stellar stage of stellar material.

*W. H. McCrea* (Belfast).

**Whipple, Fred L.:** *Supernovae and stellar collisions.* Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 118—125 (1939).

The collision hypothesis as explanation for the occurrence of novae encounters the difficulty of the great theoretical rarity of such collisions. The supernovae, however, represent a phenomenon of considerably smaller frequency than the ordinary novae. Modern estimates of the densities of stars in the nucleus of the galaxy and in external galaxies have yielded much greater values than previous investigations. Using these recent data the author shows that the frequency of stellar collisions can be comparable with the frequency of supernovae. For these stars, therefore, the collision hypothesis must be seriously considered in a discussion of their origin.

*Steensholt* (Kopenhagen).

**Gamow, G., and E. Teller:** *On the origin of great nebulae.* Phys. Rev., II. s. 55, 654—657 (1939).

Die Verff. setzen voraus: 1. daß die Rotverschiebung der Spiralnebel eine Ausdehnung der Welt bedeutet, 2. daß die Relativgeschwindigkeit zweier Nebel, soweit sie der Rotverschiebung entspricht, seit der Trennung der Nebel voneinander konstant geblieben ist. Der Zeitpunkt der Trennung liegt dann etwa  $1,8 \cdot 10^9$  Jahre vor der Gegenwart. Vorher sei die Welt eine gleichmäßige Ansammlung von Teilchen gewesen, ob von Sternen oder von Molekülen wird zunächst offen gelassen. Die Bedingung der Materiezusammenballung aus gleichförmig verteilter Materie unter dem Einfluß der Schwerkraft:  $G \rho \cdot 4 \pi R^3 / (3 R) \geq V^2 / 2$  (wo  $G$  = Newtonsche Gravitationskonstante,  $\rho$  = Dichte,  $R$  = Radius, innerhalb dessen Zusammenballung stattfinden soll,  $V$  = Teilchengeschwindigkeit) gibt  $\rho \geq \rho_0 = 3 \alpha^2 / (8 \pi G)$ , wenn für  $V$  die Rotverschiebungsgeschwindigkeit  $\alpha R$  eingesetzt wird. Vergleich mit der heutigen Materiedichte im Weltall zeigt, daß heute Zusammenballung im großen nicht möglich ist. Die Verff. machen wahrscheinlich, daß die Nebelbildung stattfand, als das Weltall 600mal kleiner war als heute: aus der berechneten Teilchengeschwindigkeit zur Zeit der Nebelbildung ( $V \approx 100$  km/sec) wird geschlossen, daß die meisten Sterne vor der Nebelbildung entstanden sind. Aus der relativistischen Theorie der Weltallausdehnung ergibt sich auf Grund der Annahme konstanter Expansionsgeschwindigkeit (die wenigstens für hinreichend späte Stadien der Ausdehnung gelten soll), daß die Welt ein offener hyperbolischer Raum ist.

*Bechert* (Gießen).